

YCup Stage 1. YiChuan

3.24 11:55-12:35, 13 题

供题人：12 班卓成杰，王韬淳，黄跃霖。

所有题目答案均是一个唯一的数，且在复数域内。

题面背景和供题人或难度或题目风格知识点均完全无关。

你不需要进行分母有理化。

1 又是一个周期

标题没有周期。

数学课上，我们学习了 \sin 和 \cos 的周期性。函数的参数是轮换又会有什么奥妙呢？

求你求出以下函数的最大值 ($x, y, z \in \mathbb{R}$) :

$$f(x, y, z) = \sin^2(x - y) + \sin^2(y - z) + \sin^2(z - x)$$

2 P 话

P 话有很多形式。比如数学满分却说着“我的数学真是太菜了”。

P 话哥告诉你：

- P 话词典是一个只由 0, 1 组成的序列 D 。
- 他说的每一句 P 话，都是词典 D 的一个非空子序列（即从 D 中删除若干个位置上的数，剩下的数按原顺序排列得到的数列）。
- 他一共会说 166 种本质不同的 P 话。
- **本质不同**：如果不同的删除方式得到了相同的 01 序列，它们只被计为一种 P 话。

你想知道，可能的 P 话词典 D 有多少种？

提示：

- 形式化题意：求恰有 166 种本质不同非空子序列的 01 串有多少个？
- 若 $D = [1, 0, 1, 0]$ ，其非空子序列共有 $2^4 - 1 = 15$ 种删法，但去重后本质不同的 P 话只有 11 种：

$[1], [0], [1, 0], [1, 1], [0, 1], [0, 0], [1, 0, 1], [1, 0, 0], [1, 1, 0], [0, 1, 0], [1, 0, 1, 0]$

3 模范

设 S 是集合 $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$ 的一个非空子集。若正整数 n 满足 $n \in S, n + |S| \in S$ ，则 n 是该子集的模范数。对于所有子集 S ，模范数的个数，的总和是多少？

4 永强

若实数集合 M 中至少含 2 个元素，且集合 M 中任意两个元素的绝对值差都大于 2，则称 M 为“永强集合”。

求出 $\{1, 2, \dots, 10\}$ 的子集中，“永强集合”的个数。

5 小小的也很可爱捏

由于小小的也很可爱捏，所以请你求出如下表达式的值：

$$\min_{a, b \in \mathbb{R}^+} \left\{ \max \left\{ a, b, \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right\} \right\}$$

6 签到题

求使得 $\sin \sqrt{2} + \sin 2\sqrt{2} + \dots + \sin n\sqrt{2} > 2$ 且不超过 10^6 的 n 有多少个？

7 我妹子呢？

妹子喜欢的礼物可以用实数 x 表示。妹子告诉你， x 满足 $\cos^2 x + \sin x + m = 0$ 。

所以你想知道 m 需要满足什么条件，才能存在这样的 x 。毕竟只有存在这样的数，你才有些机会。

如果 m 需要满足的条件形如 $[l, r]$ ，请你给出 $\frac{l^2 + r^2}{l + r}$ 作为答案。否则，请你给出 114514 作为答案。

8 想做你的星星和月亮

对于四位数 \overline{abcd} ($1 \leq a \leq 9, 0 \leq b, c, d \leq 9$)，若 $a > b, b < c, c > d$ ，则称 \overline{abcd} 是星星数。若 $a < b, b > c, c < d$ ，则称 \overline{abcd} 是月亮数。

设 $N(S)$ 表示星星数的个数， $N(M)$ 表示月亮数的个数。请你给出 $N(S) - N(M)$ 。

9 稳定

曾经有人对我说：“别让一辈子的朋友变成两个月的情侣。”

设集合 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。定义 S 中三个互不相同的子集 S_i, S_j, S_k 是一个“子集三角形”。

“子集三角形”的周长按如下方式计算：

$$|(S_i \cap S_j) \cup (S_j \cap S_k) \cup (S_k \cap S_i)|$$

求周长为 5 的不同的“子集三角形”的个数。

后来我们也没能当成一辈子的朋友。

10 我与你，到底有多远？

我在 u ，你在 v 。

在平行宇宙中，得里几欧距离的定义如下：

$$D = (u - v)^2 + \left(\sqrt{2 - u^2} - \frac{9}{v} \right)^2$$

我被世俗的枷锁约束，所以 $u \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 。你还自由，所有 $v \in \mathbb{R}^+$ 。

请问，我们的得里几欧距离 D 最小是多少？

11 月考

有时候，我们并不能让两个变量直观、简洁地表述为 $y = f(x)$ 的依赖关系，但可能它们关于同一个变量的函数关系式非常优美。比如，在研究平抛运动的时候，我们通常不会写 $y = \frac{gx^2}{2v_0^2}$ ，而是写成如下形式：

$$\begin{cases} x = v_0 t, \\ y = \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

这就是典型的参数方程。

参数方程是一个强大的工具，在解决复杂函数关系时往往十分有用。如果我要表示一个以 O 为圆心， r 为半径的圆，可以写成

$$\begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \sin t. \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

还记得月考物理的椭圆形轨道 II 吗，假设它的对称中心在原点 O ，且半长轴落在 x 轴上，半长轴是 12，半短轴是 7。

求对于轨道上任意一点 $P(x, y)$ ：

- $2x + y$ 的最小值是多少？
- $y - \frac{x^3}{\sqrt{114514}} + x^2$ 的最小值是多少？

请给出两个问题的答案之和。

12 倒数的取值范围

我们知道，如果 x 的取值范围是 $[l, r]$ ，且 $0 < l \leq r$ ，那么 $\frac{1}{x}$ 的取值范围就是 $[\frac{1}{r}, \frac{1}{l}]$ 。这个结论推广到负数域会是什么样的呢？

请你求出以下函数的最大值。

$$f(x) = \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x + 1}$$

13 又是一个周期又是一个周期

标题的周期为 6。

已知 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 且 $a, b, c \geq 0$ ，满足 $ab + bc + ca = 1$ 。

求以下表达式的最小值。

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c}$$