YCup Stage 1. YiChuan Solution

前言

预设难度是：

- Easy 5 7 12
- Easy-Medium 1 4
- Medium 6 8 9 10
- Hard 3 11
- Extreme 2 13

实际难度是：

- Easy 4 5 7 12
- Easy Medium 1 8
- Medium 6 10 13
- Hard 3 9 11
- Extreme 2

Yichuan 是出题人 卓成杰 同学身上的梗。与宜川中学无关。

所有题面（除了第 11 题）都是编者 王韬淳 写的。第九题的背景是真实发生的，剩下全部是胡诌的。

感谢大家的参与！我们会在接下来的一周尽可能完善规则，让大家有更好的体验！

1. 又是一个周期

定位：**Easy Medium**，出题人：王韬淳

设 $A = x - y, B = y - z, C = z - x$，则 $A + B + C = 0$。

利用恒等式

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2(A + B) = 2 - 2\cos A \cos B \cos(A + B)$$

该函数的最大值出现在 $A = B = C = \pm\frac{2\pi}{3}$ 时，此时 $\sin^2(\frac{2\pi}{3}) = \frac{3}{4}$。三个平方项之和为 $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$。

2. P 话

定位：**Extreme**，出题人：王韬淳

王以老师并没有成功做出。

我们考察，如何对一个 01 串的本质不同子序列个数计数。

设 S_0 表示以 '0' 结尾的不同子序列数量，S_1 为所有以 '1' 结尾的不同子序列数量。

发现，每当我们碰到一个 0，相当于 $S_0 \leftarrow S_0 + S_1 + 1$，每碰到一个 1，相当于 $S_1 \leftarrow S_0 + S_1 + 1$。

最后的答案就是 $S_0 + S_1$。

> 考虑证明：对于当前串的所有本质不同子序列分类，以当前末位为 0 为例。

> 对于所有串分类：末尾有至少两个 0 的，和末尾恰有一个 0 的，和以 1 结尾的。
>
> 发现末尾有至少两个 0 的，一定与删去当前末位的以 0 结尾的子序列构成双射，即原来 S_0。
>
> 末尾恰有一个 0 的，除了整个子序列就是 $[0]$ 以外，一定与删去当前末位的以 0 结尾的子序列构成双射，即原来 S_1。
>
> 末尾没有 0 的，即现在的 S_1 还是原来的 S_1。

我们对坐标进行一手变换，让 S_0, S_1 初值为 1，则转移变成了 $S_0 \leftarrow S_0 + S_1$ 或 $S_1 \leftarrow S_0 + S_1$。最后的答案是 $S_0 + S_1 - 2$。

这个过程相当于**辗转相减法**的逆过程。即所有碰到的 (S_0, S_1) 一定互质。所以我们相当于要求 $\gcd(S_0, S_1) = 1, S_0 + S_1 = 166 + 2 = 168$ 的整数对个数。

$\gcd(S_0, S_1) = 1$，相当于 $\gcd(S_0, S_0 + S_1) = 1$。所以即求小于 168 的与之互素的数个数，即 $\phi(168)$，答案为 48。

3. 模范

定位：**Hard**，出题人：卓成杰

设 n 是 S 的一个模范数, $|S| = k$, 则 $n \in S, n + k \in S$, 有 $2 \leq k \leq 15 - n$.

对于集合 S 而言, 除了 $n, n + k$ 以外, 剩下的 $k - 2$ 个元素共有 $\binom{13}{k-2}$ 种选法

那么答案就是 $\displaystyle\sum_{n=1}^{13} \sum_{k=2}^{15-n} \binom{13}{k-2} = \sum_{n=1}^{13} \sum_{k=0}^{13-n} \binom{13}{k} = \sum_{k=0}^{13} (13 - k) \binom{13}{k}$

考虑对偶原理，$\displaystyle\sum_{k=0}^{13} (13 - k) \binom{13}{k} = \sum_{k=0}^{13} (13 - k) \binom{13}{13 - k} = \sum_{k=0}^{13} k \binom{13}{k}$

加起来得到 $\displaystyle\sum_{k=0}^{13} 13 \binom{13}{k} = 13 \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} = 13 \times 2^{13}$

所以答案就是 $\dfrac{13 \times 2^{13}}{2} = 13 \times 2^{12} = 53248$

4. 永强

定位：**Easy-Medium**，出题人：卓成杰。

不难发现这个题直接计数会有点困难, 考虑数列递推的思想, 设答案为 a_n.

如果这个集合里有 n 的话, 那么剩下的就是 $1 \sim n - 3$ 的元素, 所以是 a_{n-3}, 但由于这个集合里剩下的元素个数可能为 1, 所以要再加上 $n - 3$

如果这个集合里没有 n 的话, 那么剩下的就是 $1 \sim n - 1$ 的元素, 所以是 a_{n-1}

于是可以写出递推式 $a_n = a_{n-3} + a_{n-1} + n - 3 (n \geq 4)$

初值条件是 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, 手算即可, 得到 $a_{10} = 49$

5. 小小的也很可爱捏

定位：**Easy**，出题人：卓成杰

你考虑设 $M=\max\{a,b,\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\}$，那么就有 $M\geq a,M\geq b,M\geq\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$

所以 $2M^2\geq a^2+b^2$，乘起来就有 $2M^3\geq(a^2+b^2)(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2})\geq 4$

所以 $M\geq\sqrt[3]{2}$, 当且仅当 $a=b=\sqrt[3]{2}$ 时等号成立。当然你也可以观察 $c=a,c=b,c=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$ 的图像性质, 大胆猜测有 $a=b=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$, 然后解出 $a=b=\sqrt[3]{2}$。

6. 签到题

定位：**Medium**，出题人：卓成杰

本题是诈骗题，因为你发现你找不到一个满足条件的 n。

考虑怎么证明这个事，你又发现这是一个很典的可以裂项的式子, 可以将分子分母同乘 $\sin\frac{\sqrt{2}}{2}$

所以得到

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\sin(k\sqrt{2})\sin\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$=\frac{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[\cos(\frac{2k+1}{2}\sqrt{2})-\cos(\frac{2k-1}{2}\sqrt{2})]}{\sin\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$=\frac{\cos(\frac{\sqrt{2}}{2})-\cos\frac{2n+1}{2}\sqrt{2}}{2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

如果真的可以大于 2 的话, 那么就会有 $\cos\frac{(2n+1)\sqrt{2}}{2}<\cos\frac{\sqrt{2}}{2}-4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}$，而不等号右边是小于 -1 的, 所以这样的 n 不存在。答案为 0。

7. 我妹子呢?

定位：**Easy**，出题人：王韬淳

$m=\sin^2x-\sin x-1$。令 $u=\sin x\in[-1,1]$，则 $m=u^2-u-1$。

该二次函数在 $u\in[-1,1]$ 的最小值在 $u=\frac{1}{2}$ 取到，$l=-1.25$；最大值在 $u=-1$ 取到，$r=1$。

计算 $\frac{(-1.25)^2+1^2}{-1.25+1}=\frac{1.5625+1}{-0.25}=-10.25$。

8. 想做你的星星和月亮

定位：**Medium**，出题人：卓成杰

你发现星星数和月亮数的定义很对称, 考虑构造双射

对于一个星星数 $\overline{abcd}$, 考虑将它数位反转得到 $\overline{dcba}$, 那么当 $d\neq 0$ 时, 它就是月亮数

对于一个月亮数 $\overline{abcd}$, 反转得到 $\overline{dcba}$. 由于 $d>c$, 所以 $d\neq 0$, 所以一定能得到星星数

也就是说, 个位数不为 0 的星星数和任意月亮数构成了双射, 个数相等. 那么题目所求即为个位数为 0 的星星数个数

考虑枚举 b, 那么 $b<a\leq 9,b<c\leq 9$, 答案是 $(9-b)^2$，所以得到

$$\sum_{b=0}^{9}(9-b)^2=\sum_{b=0}^{9}b^2=\frac{9\times(9+1)\times(2\times 9+1)}{6}=285$$

9. 稳定

定位：**Medium**，出题人：卓成杰

考虑画出 Venn 图，把 $(S_i \cap S_j) \cup (S_j \cap S_k) \cup (S_k \cap S_i)$ 拆成四个区域:

$T_1 = (S_i \cap S_j) \setminus S_k, T_2 = (S_j \cap S_k) \setminus S_i, T_3 = (S_k \cap S_i) \setminus S_j, T_4 = S_i \cap S_j \cap S_k$

那么直接放的方案数是 4^5，如果有 $S_i = S_j$, 那么方案数是 2^5, 对称一下就是 3×2^5

而 $S_i = S_j = S_k$ 的情况被考虑了三次, 并且 S_i, S_j, S_k 的全排列是 $3!$

所以答案是 $\frac{1}{3!}(4^5 - 3 \times 2^5 + 2) = 155$

UPDATE : 直接给出 930（不考虑置换）也算对。

10. 我与你，到底有多远?

定位：**Medium**，出题人：卓成杰

这道题你只需要设 $P(u, \sqrt{2-u^2}), Q(v, \frac{9}{v})$, 原式就是 $|PQ|$.

点 P 在一个半圆上, 点 Q 在反比例函数第一象限的图象上, 画图可知最小值在 $P(1,1), Q(3,3)$ 时取到

所以答案是 8。

11. 月考

定位：**Hard**，出题人：黄跃霖

考虑到一个半长轴为 a，半短轴为 b 的椭圆，是由一单位圆横向拉伸 a 倍，纵向拉伸 b 倍得来的。因此题目中的参数方程是

$$\begin{cases} x = 12\cos t, \\ y = 7\sin t. \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

对于第一问，很直接地有 $2x + y = 24\cos t + 7\sin t = 25\sin(t + \varphi)$，其中 $\cos\varphi = \dfrac{7}{25}$，$\sin\varphi = \dfrac{24}{25}$.

由于 $t \in \mathbb{R}$，直接有最小值为 -25。

而对于第二问，直接做显然太过于繁杂，我们考虑不用参数方程。但你需要知道椭圆大概长什么样：上下左右四个端点分别是 $(0,7), (0,-7), (-12,0), (12,0)$。

设待求式 $x^2 + y - \dfrac{x^3}{\sqrt{114514}} = k$，则 $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{114514}} - x^2 + k$。~~惊讶的~~发现这是一个三次函数，只有常数项不知道，现在我们需要在已知条件下求出常数项的最小值。

考虑 (x, y) 的限制：它们既在椭圆上，也在函数的图像上，也就是椭圆与函数的交点。

那么约束就很清楚了：在函数与椭圆有交点的情况下尽可能向下平移最多的距离。

由于只进行向下平移，因此我们先只考虑 $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{114514}} - x^2$。

因式分解之后得到 x^2 和 $\dfrac{x}{\sqrt{114514}} - 1$ 两个函数。

由于求常数项的最小值，那么我们要分析函数的**极大值**，这样才能保证向下平移的距离最多。（感性理解一下，因为如果极大值都不能再向下平移了，椭圆的形状保证其他位置没有更优解）

考虑单调区间：容易发现 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上严格增，在 $[0,?)$ 严格减。后面这个不用仔细求，只用发现 $f(0)=0$，而且另一个零点是 $\sqrt{114514}>12$ 即可。（说明区间 $(0,\sqrt{114514})$ 恒负，不会产生极大值）

那么我们找到了在实际有效的区间，$[-12,12]$ 上的极大值 0，在 $x=0$ 处取得。考虑椭圆在 $x=0$ 时取到 $y=\pm 7$，因此最小值 k 即为 -7。

两个最小值之和，也就是答案为 -32。

12. 倒数的取值范围

定位：**Easy**，出题人：王韬淳

设 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，则 $t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ 且分母不为零即 $t\neq -1$。
由于 $t^2=1+2\sin x\cos x$，故 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$。
代入原式：$f(t)=\frac{t^2-1}{2(t+1)}=\frac{t-1}{2}$，当 $t=\sqrt{2}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$。

13. 又是一个周期又是一个周期

定位：**Extreme**，出题人：卓成杰

肯定会先考虑配凑和引参, 但是没有效果. 所以先注意到 $a=0,b=c=1$ 的时候可能是最小值。

考虑放缩法, 不妨设 $0\le a\le b\le c$, $f(a,b,c)=\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}$

考虑证明 $f(0,a+b,\dfrac{1}{a+b})\le f(a,b,c)$

也即 $\dfrac{1}{a+b+\dfrac{1}{a+b}}+a+b\le\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}$

由于 $c=\dfrac{1-ab}{a+b}$. 设 $m=a+b,n=ab$

则有 $\dfrac{1}{m+\dfrac{1}{m}}+m\le\dfrac{1}{a+\dfrac{1-n}{m}}+\dfrac{1}{b+\dfrac{1-n}{m}}$

也即 $\dfrac{m}{m^2+1}+m\le\dfrac{m}{ma-n+1}+\dfrac{m}{mb-n+1}$

也即 $\dfrac{1}{m^2+1}+1\le\dfrac{1}{ma-n+1}+\dfrac{1}{mb-n+1}$

也即 $\dfrac{m^2+2}{m^2+1}\le\dfrac{m^2-2n+2}{m^2+(n-1)^2}$

也即 $m^4+m^2(n-1)^2+2m^2+2(n-1)^2\le m^4-2m^2n+3m^2-2n+2$

也即 $m^2n^2\le 2n(1-n)$

也即 $(a+b)^2ab\le 2(1-ab)$

而 $2(1-ab)=2c(a+b)\ge(a+b)^2\ge(a+b)^2ab$ 成立

因此 $f(0,a+b,\dfrac{1}{a+b})\le f(a,b,c)$ 得证

所以 $f(a,b,c) \geq \frac{1}{a+b}+a+b+\frac{1}{\frac{1}{a+b}+a+b} \geq \frac{5}{2}$