

YCup Stage 2. NanJing

2026.3.31 11:50~12:30, 命题人: 陈洛炜、张峻源、卓成杰、王韬淳、沈博扬、叶彦哲。

1 四点

钟的海棠花未眠。

上车了。避免你在接下来的四个小时没事干, 你随手写出了这样一道题。

已知正实数 x, y, z 满足 $xyz = 1$, 求以下算式的最大值

$$\frac{1}{1+x+y^3} + \frac{1}{1+y+z^3} + \frac{1}{1+z+x^3}$$

2 P 话

这是出题人写的题面:

小 K 觉得自己信竞实在没救了, 还不如卷文化课, 因此随便出了个数学题, 随便想了个数, 看看老天希望自己何时退役。

设函数:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 282} + \sqrt{(x-1)^2 + 282} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 282} + \sqrt{(x-1)^2 + 282}}$$

求 $f(x)$ 的最小值 M 。

3 苦难与幸福一样, 都是生命盛开的花朵

若 a 是苦难, 那 $1-a$ 则是幸福。

设 a, b, c 为正实数, 且满足 $a+b+c=1$, 求:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c}$$

的最小值。

祝你, 我, 和他, 永远幸福——哦不, 永远盛开。

4 无题

我大抵是累了, 横竖都撑不起这无边的寂寥。这倦意, 像是从骨头缝里渗出来的, 一丝一丝, 缠得人喘不过气。我想, 是该说出那句话了——我们, 便就此别过罢。此后各自散去, 大约也谈不上什么辜负, 不过是缘分尽了, 像一场散了场的戏, 幕布落下, 台上台下, 都该寻个新的去处了。

你们的故事, 可以表现为 $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 这个集合。现在缘碎梦断, 你们需要把这个集合划分成两个非空且不相交的子集 A 和 B 。令 $C(L)$ 表示 L 这个集合的平均数。为了走的越远越好, 你们要最大化 $|C_A - C_B|$ 。

请对 $n = 20, 26326, 202, 6326, 2026, 326$ 分别求解, 并给出答案之和。

鸡鸣寺的樱花开了, 这段缘终究是碎了。

5 此后黄昏易落，锦瑟西沉

那不过是欲加之罪的余温。

令 a 是一个不小于 1000 的正整数。设 $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2a}$ 的小数点后 96 ~ 99 位分别是 x, y, z, w ，求 $\sqrt{x+y+z+w}$ 的最大值。

所谓欲加之罪，不过是迷雾里的回声。当清醒升起，桎梏便如无根之影，在光里悄然消散。

6 南博附公

人是为了活着本身而活着，而不是为了活着以外的的任何事物而活着。——余华《活着》

生存的原因我已经领悟了，该去南京博物院附属公园玩玩了！

已知有 100 个正整数，他们的和为 2026，并且相邻两项之间的差值为 1。求他们平方和的最大值。

形式化地说，已知有正整数 a_1, a_2, \dots, a_{100} ，满足 $\sum_{i=1}^{100} a_i = 2026$ ，且 $\forall 1 \leq i < 100, |a_i - a_{i+1}| = 1$ ，求 $\max \sum_{i=1}^{100} a_i^2$ 。

7 南京城墙

南京城墙不允许无监护人陪同的 16 岁以下游客进入景区。

所以你坐在城墙脚下写题：求 $y = \cos(2 \arccos x) + 4 \sin(\arcsin \frac{x}{2})$ 的最大值 M 和最小值 m 。

请给出 $1000M + m$ 的值。

骗你的，没到 16 岁我也上去了。

8 正方中路

由于你迟到了。所以你被要求做一道题：

在锐角三角形 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ 。 BE, CF 为 $\triangle ABC$ 的两条内角平分线。 I 为两角平分线交点。 O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心， J 为 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 内的旁切圆圆心（即 $\angle A$ 的内角平分线与 $\angle B, \angle C$ 的外角平分线的交点）， $OH \perp EF$ 于 H ， OH 的反向延长线与 BC 交于点 G 。

已知 $JO = 13, AO = 5$ ，求 $\frac{GO}{GH}$ 的值。

9 语录

你将 wy 老师的的所言所行整理下来，形成了《王语》。后人阅读《王语》时的见闻被编撰成了《王语闻》，即 wyw。

《王语》中有如下记载：已知 a, b, c, d, e 为实数，设 $a + b + c + d + e = 8, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$ ，求 e 的最大值。

10 预算 300

这是原来的题面，它假了：

设二次三项式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，已知 a, b, c 均为正整数，且 $a + b + c = 2000$ 。

你可以花 1 的预算将其中一个系数 (a, b, c) 加 1 或减 1 (可以减到非正数)

求出你至少要准备多少预算，才能保证对于每一个可能的二次三项式，都能找到一种预算内的操作方式使之有整数根。

我们可以证明答案不超过 1022。但是我们无法证明其必要性。

所以求一切正整数 $n(n \geq 3)$ ，使 $1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ 是 2 的次幂。

假设 $[3, 2026]$ 中共有 a_1 个这样的 n ， $[3, 30]$ 内所有满足条件的 n 的积是 a_2 。

请求出 $a_1 + a_2$ 。

11 内心丰盈者，独行也出众

对于任意 12 个实数 a_1, a_2, \dots, a_{12} ，有

$$\min_{1 \leq i < j \leq 12} (a_i - a_j)^2 \leq k \sum_{i=1}^{12} a_i^2$$

求 k 的最小值。

你不需要靠和其他 a_i 的比较来证明自我，你只用让自己和自己越发融洽， k 就会最小。

12 急急急

因此没有题目背景。

在圆内接凸四边形 $ABCD$ 中，若 $\vec{AB} + 3\vec{BC} + 2\vec{CD} + 4\vec{DA} = 0$ ，且 $|\vec{AC}| = 4$ ，求 $|\vec{AB}| + |\vec{BC}|$ 的最大值。