

# YCup Stage 2. Nanjing Sol

## 1 T1

通分不等式左侧，等价于证明： $\sum_{cyc}(1+y+z^3)(1+z+x^3) \leq (1+x+y^3)(1+y+z^3)(1+z+x^3)$

展开两边： $\sum_{cyc}(1+x+y+z+x^3+y^3+z^3+x^3y^3+z^3x^3) \leq \prod_{cyc}(1+x+y^3)$

经过代数化简，原不等式等价于： $\sum x + \sum x^3 \leq \sum x^4 + \sum x^3y^3$  利

构造加权项： $\frac{2}{39}x^4 + \frac{10}{39}z^3x^4 + \frac{2}{3}x^4y^4 + \frac{1}{39}z^4 \geq \frac{2}{39} + \frac{10}{39} + \frac{2}{3} + \frac{1}{39} \cdot \sqrt[39]{x^{4 \cdot \frac{2}{39} + 4 \cdot \frac{10}{39} + 4 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{1}{39}} \cdot z^{3 \cdot \frac{10}{39} + 4 \cdot \frac{1}{39}} \cdot y^{4 \cdot \frac{2}{3}}}$

经化简系数得： $x^{\frac{151}{39}}z^{\frac{34}{39}} = x^3$

$\frac{17}{39}x^4 + \frac{10}{39}z^3x^4 + \frac{2}{39}x^4y^4 + \frac{10}{39}z^4 \geq (\frac{17}{39} + \frac{10}{39} + \frac{2}{39} + \frac{10}{39}) \cdot \sqrt[39]{x^{4 \cdot \frac{29}{39}} \cdot z^{3 \cdot \frac{10}{39} + 4 \cdot \frac{10}{39}} \cdot y^{4 \cdot \frac{2}{39}}}$

即： $x^{\frac{109}{39}}y^{\frac{70}{39}}z^{\frac{39}{39}} = x$

综上，通过对称性求和可得： $\frac{4}{13}\sum x^4 + \frac{9}{13}\sum x^3y^3 \geq \sum x + \sum x^3$

## 2 T2

令  $g(x) = \sqrt{x^2 + 282} + \sqrt{(x-1)^2 + 282}$ 。

在平面直角坐标系中，设  $A(0, \sqrt{282})$ ,  $B(1, -\sqrt{282})$ ,  $P(x, 0)$ 。

则  $g(x) = PA + PB$ 。根据三角形两边之和大于第三边，当  $P$  在直线  $AB$  上时， $PA + PB$  取得最小值。

最小值为线段  $AB$  的长度： $AB = \sqrt{(1-0)^2 + (-\sqrt{282} - \sqrt{282})^2} = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{282})^2} = \sqrt{1 + 4 \times 282} = \sqrt{1129}$ 。

原函数可看作  $h(u) = u + \frac{1}{u}$ ，其中  $u = g(x) \geq \sqrt{1129}$ 。

因函数  $h(u) = u + 1/u$  在  $u \geq 1$  时为单调递增函数，故当  $u = \sqrt{1129}$  时， $f(x)$  取得最小值。

$M = \sqrt{1129} + \frac{1}{\sqrt{1129}} = \frac{1129+1}{\sqrt{1129}} = \frac{1130}{\sqrt{1129}}$ 。

## 3 T3

原式  $S = (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) + (\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b})$ 。

赫尔德不等式或柯西不等式的分式形式： $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{(1+1+1)^2}{a+b+c} = \frac{9}{1} = 9$ 。

同理， $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{(b+c)+(a+c)+(a+b)} = \frac{9}{2(a+b+c)} = \frac{9}{2} = 4.5$ 。

故  $S \geq 9 + 4.5 = 13.5$ 。当  $a = b = c = 1/3$  时取等。

## 4 T4

令  $|A| = k$ ,  $|B| = n - k$ 。

欲最大化  $|C_A - C_B|$ ，令  $A = \{1\}$ ,  $B = \{2, \dots, n\}$ 。

此时  $C_A = 1$ 。  $C_B = \frac{\sum_{i=1}^n i-1}{n-1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}-1}{n-1} = \frac{(n-1)(n+2)}{2(n-1)} = \frac{n+2}{2}$ 。

差值  $D(n) = |\frac{n+2}{2} - 1| = \frac{n}{2}$

计算给定的  $n$  值之和:  $S_{sum} = \frac{1}{2} \times (20 + 26326 + 202 + 6326 + 2026 + 326) = \frac{1}{2} \times 35226 = 17613$ 。

## 5 T5

令  $\alpha = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ ,  $\beta = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{6}$ 。显然  $\alpha\beta = 1$ ,  $0 < \beta < 1$ 。

考察  $X_a = \alpha^a + \beta^a$ 。由于  $\alpha^a = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2a}$  且  $\beta^a$  极小,  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2a}$  的整数部分为  $X_a - 1$ 。

小数部分为  $\beta^a$ 。因为  $\beta = 5 - 2\sqrt{6} \approx 0.10102$ ,  $\beta^a$  在  $a$  很大时, 其小数点后的数字序列以 0 开头, 并迅速趋向于 0。

因此,  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2a}$  的小数点后 96 ~ 99 位趋近于 9999。

## 6 T6

sby 供题。

最优构造形如: 1, 2, 1, 2, ..., 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 9, 10, ..., 62。

考虑到任意数组  $a$  的平方和都不会超过  $(\sum a)^2$ , 所以我们希望这个构造的最大值最大。这个数可以做到 62, 剩下的和可以靠小数填充。

## 7 T7

化简得  $y = (2x^2 - 1) + 2x = 2x^2 + 2x - 1$ 。定义域受  $\arccos x$  限制为  $x \in [-1, 1]$ 。二次函数在  $x = 1$  取最大值 3, 在  $x = -\frac{1}{2}$  取最小值  $-\frac{3}{2}$ 。

## 8 T8

因  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle EIF = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A = 120^\circ$ , 则  $A, E, I, F$  四点共圆。又  $\angle BIC = 120^\circ = \angle BOC$ ,  $\angle BJC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A = 60^\circ$ , 则  $B, I, O, C, J$  五点共圆, 点  $N$  为其圆心 (鸡爪定理)。

于是  $\angle OIC = \angle OBC = 30^\circ = \angle IAE = \angle IFE$ , 从而  $IO \parallel FE$ 。

因为  $\angle JOI = \angle JCI = 90^\circ$ , 即  $JO \perp IO$ , 所以  $JO \perp FE$ 。又直线  $GOH \perp FE$ , 故点  $J$  在直线  $HG$  上。由  $\angle BOC = 120^\circ$ ,  $N$  为  $\widehat{BC}$  的中点, 知点  $O, N$  关于  $BC$  对称, 从而  $GO = GN$ 。又  $OA = ON = NJ$ , 则  $\angle OAN = \angle ONA = 2\angle NOJ = \angle NGJ$ , 从而  $A, O, G, N$  四点共圆, 则  $\angle GAN = \angle GON = \angle GJN$ 。故点  $G$  在  $AJ$  的中垂线上。

设  $JB, JC$  与直线  $FE$  分别交于点  $T, L$ 。因为  $\angle AET = \angle AIF = \angle IAC + \angle ICA = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C$ ,  $\angle ABT = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C$ , 所以  $\angle AET = \angle ABT$ 。故  $A, E, B, T$  四点共圆。

于是  $\angle TAE = 180^\circ - \angle TBE = 90^\circ$ ,  $\angle TAF = 30^\circ$ ,  $\angle BTF = 60^\circ$ 。同理,  $\angle LAE = 30^\circ$ ,  $\angle CLE = 60^\circ$ 。所以  $\angle TAL = 120^\circ$ 。又  $\angle TJL = 60^\circ$ , 则  $A, T, J, L$  四点共圆, 所以  $\triangle JTL$  为正三角形。

由  $JH \perp TL$ , 点  $G$  在  $AJ$  的中垂线上, 知点  $G$  为  $\odot(ATJL)$  的圆心, 也是  $\triangle JTL$  的中心。所以  $JG = 2GH$ 。作  $HV \parallel ON$  交  $BC, GN$  的延长线分别于点  $Q, V$ 。  $JZ \perp BC$  于点  $Z$ 。

前面已证点  $O, N$  关于  $BC$  对称, 则  $BC$  也垂直平分  $HV$ 。注意到  $HV \parallel JZ$ , 有  $\frac{HQ}{JZ} = \frac{HG}{JG} = \frac{1}{2}$ 。所以  $HV = 2HQ = JZ = r_a$ 。故  $\frac{GO}{GH} = \frac{ON}{HV} = \frac{R}{r_a}$ 。

$R = 5, d = 13$ , 由夏普尔定理知  $d^2 = R^2 + 2Rr_a$ , 所以  $r_a = \frac{d^2 - R^2}{2R} = \frac{72}{5}$ 。

所以  $\frac{GO}{GH} = \frac{5}{\frac{72}{5}} = \frac{25}{72}$ 。

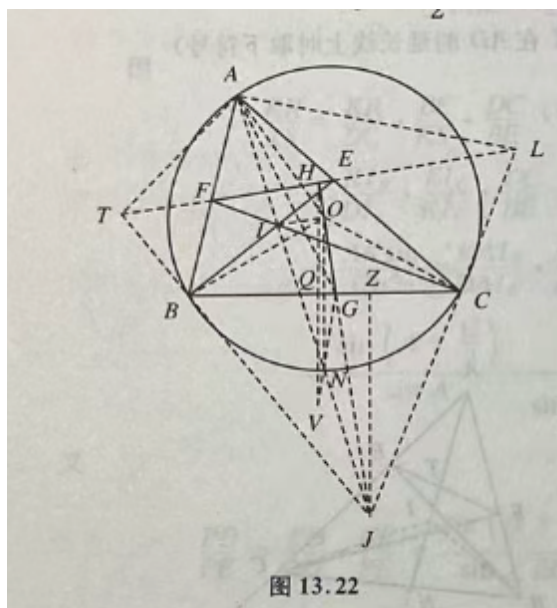


图 13.22

## 9 T9

经典题。

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (a + b + c + d)^2$$

由原方程可得:  $a + b + c + d = 8 - e$   $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16 - e^2$  代入柯西不等式:  $4(16 - e^2) \geq (8 - e)^2$

$$64 - 4e^2 \geq 64 - 16e + e^2 \quad 5e^2 - 16e \leq 0 \quad e(5e - 16) \leq 0$$

故  $e$  的最大值为  $\frac{16}{5}$ 。

## 10 T10

对于某个正整数  $k$ , 必有

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 2^k.$$

可将原方程改写为

$$(n + 1)(n^2 - n + 6) = 3 \cdot 2^{k+1}.$$

设  $m = n + 1$ , 则  $m \geq 4$ , 且

$$m(m^2 - 3m + 8) = 3 \cdot 2^{k+1}.$$

于是,  $m$  必是形如  $2^s$  或  $3 \cdot 2^t$  之一。

- 如果  $m = 2^s$ , 那么  $s \geq 2$ . 于是对于某个正整数  $t$ , 有

$$2^{2s} - 3 \cdot 2^t + 8 = m^2 - 3m + 8 = 3 \cdot 2^t.$$

如果  $s \geq 4$ , 那么  $8 \equiv 3 \cdot 2^t \pmod{16}$ . 因此,  $t = 3$ , 所以  $m^2 - 3m + 8 = 24$ , 这意味着

$$m(m - 3) = 16,$$

无解。检验  $2 \leq s \leq 3$  的情况, 求出  $s = 3$  推得  $n = 7$ , 以及  $s = 2$  推得  $n = 3$ 。

- 如果  $m = 3 \cdot 2^u$ ,  $u \geq 1$ . 于是对于某个正整数  $v$ , 有

$$9 \cdot 2^{2u} - 9 \cdot 2^v + 8 = m^2 - 3m + 8 = 3 \cdot 2^v$$

容易检验当  $u = 1$  或  $u = 2$  时无解。如果  $u \geq 4$ , 那么  $8 \equiv 2^v \pmod{16}$ 。因此,  $v = 3$ , 所以

$$m(m-3) = 0,$$

这不可能。 $u = 3$  的情况推出  $n = 23$ 。

结论是只有解  $n = 3, 7$  和  $23$ 。

## 11 T11

zcj 供题。

不妨设  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ ,  $\min_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2 = t$ ,  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = S$ 。

则  $(a_1 - a_2)^2 \geq t$ ,  $(a_1 - a_3)^2 = (a_1 - a_2 + a_2 - a_3)^2 \geq 2^2 t$ ,  $(a_1 - a_n)^2 \geq (n-1)^2 t$ 。

其他的  $(a_i - a_j)^2$  同理。

上述所有式子左边相加为:  $(n-1)S - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = (n-1)S - \sum_{i \neq j} a_i a_j = nS - (\sum_{i=1}^n a_i)^2 \leq nS$ 。

右边相加为  $t \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)k^2 = \frac{t}{2} \sum_{k=1}^{n-1} [(n-k)k^2 + (n-k)^2 k] = \frac{t}{2} \sum_{k=1}^{n-1} nk(n-k)$ 。也就是  $\frac{tn}{2} (\sum_{k=1}^{n-1} nk - \sum_{k=1}^{n-1} k^2) = \frac{tn}{2} (\frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}) = \frac{tn^2(n^2-1)}{12}$ 。

$nS \geq \frac{tn^2}{n^2-1} 12 \leftrightarrow t \leq \frac{12}{n(n^2-1)} S, k_{\min} = \frac{1}{143}$ 。

## 12 T12

记  $AC \cap BD = P$ , 则得  $\overrightarrow{3PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{2PB} + \overrightarrow{2PD}$ 。

由方向可知,  $\overrightarrow{3PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{2PB} + \overrightarrow{2PD} = \mathbf{0}$ 。

所以  $|AP| = \frac{1}{3}|CP|, |BP| = |DP|$ , 即  $|AP| = 1, |BP| = \sqrt{3}, |CP| = 3, |DP| = \sqrt{3}$ 。

设  $\angle APB = \theta$ , 有

$$\sqrt{4 - 2\sqrt{3} \cos \theta} + \sqrt{3(4 + 2\sqrt{3} \cos \theta)} \leq \sqrt{(1+3)(4+4)} = 4\sqrt{2}$$