

YCup Stage 3. ヨスガノソラ

2026.4.7 11:50-12:30, 命题人: 艾泽信, 钱骏, 钱信毅, 惠雨辰

仿宋字体表示编者注。

比赛结束后请将比赛场地复原, 否则罚 1 题。

赛前所有透的东西都不保真, 甚至不保证是同一套卷子。

1 清明

由于你不知道应该说清明快乐还是清明安康, 你决定开始写题。

由于你甚至愚人节都没有收到情书, 你决定开始写题。

由于你没看过 ヨスガノソラ, 你决定开始写题。

由于你不会写题, 你决定开始写题。

由于你决定开始写题。

求值。

$$1 \cdot 3 \cdot C_{2026}^1 - 3 \cdot 3^2 \cdot C_{2026}^3 + 5 \cdot 3^3 \cdot C_{2026}^5 - 7 \cdot 3^4 \cdot C_{2026}^7 + \dots + 2025 \cdot 3^{1013} \cdot C_{2026}^{2025}$$

2 星烛

已知数列 a, b 。

a 数列表示连接, 它创设了与 b 数列的合作。有 $a_1 = 1$, 且对于任意大于等于 2 的整数 n , 有 $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ 。

b 数列表示间隔, 它保持了与 a 数列的差距。有 $b_1 = 2$, 且对于任意大于等于 2 的整数 n , 有 $b_n = b_{n-1} - a_{n-1}$ 。

求 $a_{2026}b_{2026}$ 。

3 抽卡

小 I 是一个热衷于 kards 的玩家, 经常深夜和别人交流心得, 最近他遇到了抽卡难题, kards 中有两种卡包, 小 I 常常不能出金, 为此甚至遗憾淡游。

虽然 kards 的游戏规则十分复杂, 但是我们可以通过一道期望题检查一下你的抽卡素养。

对四位数 1978, 每次随机交换其中 2 位数字, 则连续 13 次操作后所得四位数的值的数学期望是多少? (保留三位数字)

这道题本来是 9178 的。验题人提出 1978, 那很红了。

这道题本来是保留八位小数的, 后来发现卡西欧算不出来。所以仁慈了。

4 陨星之诗

查尔斯·狄更斯在《双城记》中写道：“这是最好的时代，这是最坏的时代；这是智慧的时代，这是愚蠢的时代。”

假设宇宙中存在两颗平行的灵魂——序列 A 与序列 B 。它们各自携带并分配着等量的火光（总量 $S = 2026^{2026}$ ），同时它们又都在各自净化，因而两个序列单调不降。

尽管它们在总量上达成了绝对的平等，但在每一个细微的时间切片 i 上，它们却在进行一场关于“慷慨”与“吝啬”的博弈。如果我们将 $c_i = \min(a_i, b_i)$ 视作两股力量在第 i 个瞬间的共鸣，那么这个世界正陷入一种极端孤独的境地：尽管总量如此宏大，但它们之间的共鸣之和，竟被压缩到了微尘般的 $\frac{1}{S}$ 以下。这正如加缪在《西绪福斯神话》中所暗示的：“那种对统一的渴望，与那个支离破碎的世界之间的对立，构成了荒诞。”

试问：在这种极端疏离且秩序井然的系统里，为了承载这样巨大的总量，这个世界至少需要分裂成多少个碎片？即求 n 的最小值。

“一切存在，皆由匮乏而起；一切相遇，皆由错位而终。”

5 心灵感应

wtcqwq 曾说过下次不写情感相关题面了，但是这个确实不是 wtcqwq 写的。

听说，当两个人的灵魂频率产生共鸣时，就会发生名为“心灵感应”的奇迹。但我与 maze 之间，似乎总隔着一层迷雾。我拼命调整着自己的状态 $z_1 \in \mathbb{C}$ ，试图向她靠近，但我能到达的范围仅仅是： $|z_1 - 3| = \sqrt{5}$

而 maze 的心思 $z_2 \in \mathbb{C}$ 更加难以捉摸。通过长时间的观察，我发现她的频率隐藏在这样一个复杂的方程中：

$$|z_2 + 1|^2 + \operatorname{Im}(z_2) + |z_2^2 + 2z_2 + 5|^2 + 3 = |z_2|^2$$

$|z_1 - z_2|$ 代表我与她之间的距离，请问我与 maze 之间，最少还隔着多远的距离？

Hint: Im 表示一个复数的虚部。

6 遥远的天际，我们曾见过的光芒

由于这道题看起来就很签到，所以我不拿题面欺骗大家了。

已知 A, B 满足条件 $\sin A \cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，求以下式子的最小值：

$$\frac{1}{\sin^2 A - \sin^2 B} + 2024$$

7 追赶未来

“她曾说过，加法是长久的陪伴，而乘法是瞬息的奇迹。只要你相信奇迹，未来便会如约而至。”

小 L 弄丢了关于她的所有记忆。他只剩下最后一个尘封的信箱，里面装着 14 封未拆开的信。其中 7 封信写满了“相守”的蓝色，7 封信绘着“重逢”的红色。

小 L 初始的心动值仅为 1。他开始盲目地、不放回地抽取这些信件：

- 每拆开一封蓝色的信，心动值便会增加 3；
- 每拆开一封红色的信，心动值便会翻一倍。

小 L 固执地认为，只要读完所有信件后，心动值能突破那个名为 2026 的界限，他就能在现实中再次遇见她。

请你帮小 L 计算一下，这个“奇迹”发生的概率。

8 出题人说不给图

锐角三角形 ABC 中，一点 P 满足 $\frac{\vec{PA}}{|\vec{PA}|} + \frac{\vec{PB}}{|\vec{PB}|} + \frac{\vec{PC}}{|\vec{PC}|} = \vec{0}$ 。

P 在三边 BC, AC, AB 上的投影为 D, E, F ，若 $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\angle ACB = 45^\circ$ ， $BC = 6 + 2\sqrt{3}$ 。

求 $S_{\triangle DEF}$ 。

9 三国杀和春天

这里本来有一个关于三国杀的题面，但是我没看懂，所以我 remake 了。

你有无数个春天，又怎会纠缠眼前的瞬间。

你和妹子因为春天走到一起，所以你们都认为真正的春天可以用一个长度为 3 的 01 序列描述，其中妹子认为真正的春天是 $(1, 1, 0)$ 。

每一天，春之神会随机且独立地生成一个 0 或 1。如果过去三天所构成的序列恰好对应了妹子眼中真正的春天，她就会出门踏春，离你远去。所以你必须使自己眼中真正的春天的首次出现，最大概率地早于她眼中真正的春天（这样她就会认为她的春天是你）。

Hint:

假设你眼中真正的春天是 $(0, 0, 0)$ 。

则 $(1, 1, 1, 0, 0)$ 中，无论后续，妹子会离开你。 $(1, 0, 0, 0)$ 中，无论后续，妹子会认为她的春天是你。

请给出你眼中真正的春天和这一概率。假设该三元组为 (i, j, k) ，概率为 P ，请给裁判 $8i + 4j + 2k + P$ 作为答案。