

# YCup Stage 3 Sol

## 1

设  $n = 2026$ 。我们需要计算的和为  $S = \sum_{r \in \{1, 3, \dots, n-1\}} r \cdot 3^{(r+1)/2} (-1)^{(r-1)/2} C_n^r$ 。

注意到项的符号是交替的:  $k = 1 \implies +$ ,  $k = 2 \implies -$ 。

考虑函数  $f(x) = \sum_{r \text{ odd}} C_n^r x^r = \frac{1}{2} [(1+x)^n - (1-x)^n]$ 。

求导得:  $f'(x) = \sum_{r \text{ odd}} r C_n^r x^{r-1} = \frac{n}{2} [(1+x)^{n-1} + (1-x)^{n-1}]$ 。

题目中的项可以写成:  $(2k-1) \cdot 3 \cdot (3 \cdot (-1))^{(2k-2)/2} C_n^{2k-1} = 3 \cdot r C_n^r (\sqrt{3}i)^{r-1}$ 。

令  $x = \sqrt{3}i$ :  $f'(\sqrt{3}i) = \frac{2026}{2} [(1 + \sqrt{3}i)^{2025} + (1 - \sqrt{3}i)^{2025}]$ 。

利用复数的指数形式:  $1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\pi/3}$ ,  $1 - \sqrt{3}i = 2e^{-i\pi/3}$ 。

则  $(1 + \sqrt{3}i)^{2025} = 2^{2025} e^{i675\pi} = 2^{2025} (-1) = -2^{2025}$ 。同理  $(1 - \sqrt{3}i)^{2025} = -2^{2025}$ 。

所以  $f'(\sqrt{3}i) = 1013 \cdot (-2^{2025} - 2^{2025}) = -1013 \cdot 2^{2026}$ 。原式  $= 3 \cdot f'(\sqrt{3}i) = -3039 \cdot 2^{2026}$ 。

赛场上建议找规律:

$n$	$S(n)$
2	6
4	-96
6	288
8	1536
10	-15360
12	36864

## 2

构造复数  $z_n = a_n + ib_n$ 。

$z_n = (a_{n-1} + b_{n-1}) + i(b_{n-1} - a_{n-1}) = a_{n-1}(1-i) + b_{n-1}(i+1) = (a_{n-1} + ib_{n-1})(1-i) = z_{n-1}(1-i)$ 。  
这是一个公比为  $1-i$  的等比数列。  $z_1 = 1 + 2i$ 。

$z_{2026} = z_1 \cdot (1-i)^{2025} = (1+2i) \cdot [(1-i)^2]^{1012} \cdot (1-i) = (1+2i) \cdot (-2i)^{1012} \cdot (1-i)$ 。由于  $(-2i)^{1012} = 2^{1012} \cdot (i^4)^{253} = 2^{1012}$ 。

$z_{2026} = 2^{1012}(1+2i)(1-i) = 2^{1012}(1-i+2i+2) = 2^{1012}(3+i)$ 。因此  $a_{2026} = 3 \cdot 2^{1012}$ ,  $b_{2026} = 2^{1012}$ 。乘积  $a_{2026} b_{2026} = 3 \cdot 2^{2024}$ 。

验题人做法:

$n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$  时,  $a_n = a_{n-1} + b_{n-1} = a_{n-2} + b_{n-2} + b_{n-2} - a_{n-2} = 2b_{n-2}$ , 同理  $b_n = -2a_{n-2}$ 。

$$a_n b_n = -4a_{n-2} b_{n-2}.$$

### 3

设数字总和  $S = 1 + 9 + 7 + 8 = 25$ 。位置总数  $m = 4$ 。任一初始位置上的数字  $x_i$  在  $n$  次交换后仍在原位的概率  $P_n$  满足递推:  $P_n = \frac{3}{6}P_{n-1} + \frac{1}{6}(1 - P_{n-1}) = \frac{1}{3}P_{n-1} + \frac{1}{6}$  (其中  $3/6$  是指交换不涉及该位置)。解得  $P_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(\frac{1}{3})^n$ 。数字  $x_i$  移动到其他任一特定位置的概率  $Q_n = \frac{1-P_n}{3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(\frac{1}{3})^n$ 。位置  $i$  (权重  $w_i$ ) 上的期望数字为  $E_i = x_i P_n + (S - x_i) Q_n = x_i(P_n - Q_n) + S Q_n$ 。其中  $P_n - Q_n = (1/3)^n$ 。总期望  $E = \sum w_i E_i = (\sum w_i x_i)(1/3)^n + S \cdot (\sum w_i) \cdot Q_n$ 。  $\sum w_i x_i = 1978$  (原值),  $\sum w_i = 1111$ ,  $S = 25$ ,  $n = 13$ 。  $E = 1978 \cdot (1/3)^{13} + \frac{25 \cdot 1111}{4}(1 - (1/3)^{13})$ 。

### 4

为了使  $\sum \min(a_i, b_i)$  尽可能小, 我们需要让  $a_i$  在  $b_i$  较大的地方尽可能小, 反之亦然。

但由于序列是非降的, 如果  $b_1$  很大, 则所有  $b_i$  都很大, 此时  $\min$  的和会由于  $\sum a_i = S$  而被迫变大。

一种极端构造是:  $A = (0, 0, \dots, 0, S)$ ,  $B = (S/n, S/n, \dots, S/n)$ 。此时

$$\sum \min(a_i, b_i) = (n-1) \cdot 0 + \min(S, S/n) = S/n.$$

要满足  $\frac{S}{n} \leq \frac{1}{S}$ , 则  $n \geq S^2$ 。最小整数  $n = S^2 = (2026^{2026})^2 = 2026^{4052}$

### 5

$z_1$  轨迹是以  $(3, 0)$  为圆心,  $R = \sqrt{5}$  的圆。考察  $z_2$  的方程。

$$\text{设 } z_2 = x + iy.$$

注意到  $z_2^2 + 2z_2 + 5 = (z_2 + 1)^2 + 4$ 。方程变为:

$$\begin{aligned} |(x+1) + iy|^2 + y + |(x+1+iy)^2 + 4|^2 + 3 &= |x+iy|^2 \\ (x+1)^2 + y^2 + y + |(x+1)^2 - y^2 + 4 + 2i(x+1)y|^2 + 3 &= x^2 + y^2 \\ 2x + y + 4 + ((x+1)^2 - y^2 + 4)^2 + 4(x+1)^2 y^2 &= 0 \end{aligned}$$

观察可知, 若要使得各项抵消, 尝试令模长项为 0: 令  $(x+1)^2 - y^2 + 4 = 0$  且  $2(x+1)y = 0$ 。

若  $x+1 = 0 \implies x = -1$ 。代入得  $-y^2 + 4 = 0 \implies y = \pm 2$ 。

验证  $x = -1, y = -2$ :  $2(-1) + (-2) + 4 + 0 = 0$ 。成立!

所以  $z_2 = -1 - 2i$  是一个解。点  $M(-1, -2)$  到圆心  $C(3, 0)$  的距离

$$d = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (0 - (-2))^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{最小距离} = d - R = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}.$$

### 6

设  $x = \sin A, y = \cos B$ 。已知  $xy = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

$$\text{目标式分母 } \sin^2 A - \sin^2 B = x^2 - (1 - y^2) = x^2 + y^2 - 1.$$

根据均值不等式  $x^2 + y^2 \geq 2xy = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。但需注意  $x, y \in [-1, 1]$ 。由于  $xy > 0$ , 最大化分母即最大化  $x^2 + y^2$

.

在  $x = 1$  或  $y = 1$  时 (即  $\sin A = 1$  或  $\cos B = 1$ ),  $x^2 + y^2$  取得最大值  $1 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ 。

此时分母最大为  $4/3 - 1 = 1/3$ 。分式的最小值为  $1/(1/3) = 3$ 。总式最小值  $= 3 + 2024 = 2027$ 。

## 7

总排列数  $\binom{14}{7} = 3432$ 。

设  $n_j$  为在第  $j$  个红球前抽到的蓝球数量 (从右往左数, 即后面还有  $j$  个红球的蓝球数)。

最终值  $V = 1 \cdot 2^7 + 3 \cdot \sum_{j=0}^7 n_j 2^j$ 。

需满足  $128 + 3 \sum n_j 2^j > 2026 \implies \sum n_j 2^j \geq 633$ , 其中  $\sum n_j = 7$

- 若  $n_7 = 7$ :  $7 \cdot 128 = 896 \geq 633$  (1 种组合)。
- 若  $n_7 = 6$ :  $768 + 2^j \geq 633$  (所有 7 种组合均可)。
- 若  $n_7 = 5$ :  $640 + \sum_{j=0}^6 n_j 2^j \geq 633$  (所有  $\binom{2+7-1}{2} = 28$  种均可)。
- 若  $n_7 = 4$ :  $512 + \sum n_j 2^j \geq 633 \implies \sum_{j=0}^6 n_j 2^j \geq 121$ 。  $n_6 = 3$  (1种) ;  $n_6 = 2$  (6种) ;  $n_6 = 1, n_5 = 2$  (1种) 。共 8 种。
- 若  $n_7 = 3$ :  $384 + \sum \geq 633 \implies \sum \geq 249$ 。唯一解  $n_6 = 4$  (1种)。

总数  $= 1 + 7 + 28 + 8 + 1 = 45$ 。 概率  $P = \frac{45}{3432} = \frac{15}{1144}$ 。

难度可降 medium

4. 1° 分母 (一共多少种情况)

假设 14 封信都不同 则有  $14!$  种情况  
 但有 7 封信为蓝, 它们没有顺序, 故除以  $7!$   
 同理, 红 除以  $7!$   
 $\therefore$  分母为  $\frac{14!}{2 \times 7!} = 3432$

2° 分子 ( $\geq 2026$  的有几个算式)

我们知道, 先加 3 后  $\times 2$  能得更数值  
 先  $\times 2$  后 +3 能得更小值

$$\therefore \max = (1+7 \times 3) \times 2^7 = 2816 \text{ 略大于 } 2026$$

$$\min = 2^7 \times 1 + 7 \times 3 = 149 \text{ 远小于 } 2026$$

猜想 分子不大, 故分类讨论

记在第一次拆红信前已拆开  $x$  封蓝

发现  $x=2$  时

$$1+2 \times 3 = 7$$

$$7 \times 2 = 14$$

$$(14+5 \times 3) \times 2^6 < 2026$$

$$\text{最大也 } < 2026 \therefore x > 2$$

$x=3$  时

$$1+3 \times 3 = 10$$

$$(20+4 \times 3) \times 2^6 = 2048 \text{ 恰好大于}$$

最大  $> 2026$   $\therefore$  1 种, 可证无他方法

$x=4$  时  $1+3 \times 4 = 13$

$$(13+3 \times 3) \times 2^6 > 2026$$

$$(2 \times 13 + 2 \times 3) \times 2^6 = 2048 \text{ 勉强大于 } 2026$$

$$[(2 \times 13 + 3) \times 2 + 2 \times 3] \times 2^5 = 2048 \text{ 勉强, } 1 \text{ 种}$$

$32 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$   
 $\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$  这 7 个位置可 +3  $\therefore$  7 种

55x 时  $1+3 \times 5 = 16$

$$(16 \times 2) \times 2^6 = 2048 \text{ 勉强大于 } 2026$$

$$\therefore 16 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$$

8 个位置可加两次 3

$$\therefore C_8^2 + 8 = 36$$

$$\text{共 } 36 + 7 + 1 + 1 = 45 \text{ 种} \therefore \text{答案为 } \frac{45}{3432}, \text{ 约分后为 } \frac{15}{1144}$$

## 8

我实在是看不懂出题人的字, 意会一下吧。

$\triangle APB, \triangle FPD, \triangle BPC$  相似。

$$\angle PFD = \angle PAB, \angle PDF = \angle PCB$$

$$\text{又, } \angle EDP = \angle ECP, \angle PFE = \angle PAE$$

所以,  $\angle BAC = \angle DFE, \angle ACB = \angle FDE$

$$\angle ABC \sim \angle FED.$$

设  $\angle ABP = \theta, \angle BAP = 60^\circ - \theta$ 。

$$\text{正弦定理, } \frac{\sin \theta}{\sin(60^\circ - \theta)} = \frac{AP}{BP} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = \sqrt{3} - 1.$$

$$\tan \theta = 2\sqrt{3} - 3.$$

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{1+(2\sqrt{3}-3)^2}} = \frac{DF}{BC} = \frac{DF}{DB}$$

$$DF = \frac{(2\sqrt{3}-3)(6+2\sqrt{3})}{\sqrt{1+(2\sqrt{3}-3)^2}}$$

$$BC = 6 + 2\sqrt{3}, AB = 6\sqrt{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DEF} \times \left(\frac{AC}{DF}\right)^2 = 18 + 6\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle DEF} = \frac{45+21\sqrt{3}}{13}$$

## 9

严格证明是难的，本来就希望你猜。

放个 clw 的证明

9. 定义  $f(XX)$  为当前式子最后两位是  $XX$  然后就可以开始转移

1°  $A = (0, 0, 0)$

$$\begin{aligned} f(00) &= 0.5 \times 100\% + 0.5 f(01) \\ f(01) &= 0.5 f(10) + 0.5 f(11) \\ f(10) &= 0.5 f(00) + 0.5 f(01) \\ f(11) &= 0.5 \times 0\% + 0.5 f(11) \therefore f(11) = 0 \end{aligned}$$

$\therefore \begin{cases} f(01) = 0.5 f(10) \\ f(10) = 0.5 f(00) + 0.5 f(01) \\ f(00) = 0.5 + 0.5 f(01) \end{cases}$  解得  $\begin{cases} f(00) = 0.6 \\ f(01) = 0.2 \\ f(10) = 0.4 \\ f(11) = 0 \end{cases} \therefore P = \frac{1}{4}(0.6 + 0.2 + 0.4 + 0) = 0.3$

2°  $A = (0, 0, 1)$

$$\begin{aligned} f(00) &= 0.5(100) + 0.5 \times 0\% \therefore f(00) = 1 \\ f(01) &= 0.5 f(10) + 0.5 f(11) \\ f(10) &= 0.5 f(00) + 0.5 f(01) = 0.5 + 0.5 f(01) \\ f(11) &= 0.5 \times 0\% + 0.5 f(11) \therefore f(11) = 0 \end{aligned}$$

得  $\begin{cases} f(00) = 1 \\ f(01) = \frac{1}{3} \\ f(10) = \frac{2}{3} \\ f(11) = 0 \end{cases} P = \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 0) = 0.5$

3°  $A = (0, 1, 0)$

$$\begin{aligned} f(00) &= 0.5 f(00) + 0.5 f(01) \therefore f(00) = f(01) \\ f(01) &= 0.5 \times 100\% + 0.5 f(11) = 0.5 + 0.5 f(11) \\ f(10) &= 0.5 f(00) + 0.5 f(01) = f(01) \\ f(11) &= 0.5 \times 0\% + 0.5 f(11) \therefore f(11) = 0 \end{aligned}$$

得  $\begin{cases} f(00) = 0.5 \\ f(01) = 0.5 \\ f(10) = 0.5 \\ f(11) = 0 \end{cases} P = \frac{1}{4}(0.5 + 0.5 + 0.5 + 0) = 0.375$

4°  $A = (0, 1, 1)$

$$\begin{aligned} f(00) &= 0.5 f(00) + 0.5 f(01), f(00) = f(01) \\ f(01) &= 0.5 f(10) + 0.5 \times 100\% = 0.5 f(10) + 0.5 \\ f(10) &= 0.5 f(00) + 0.5 f(01) = f(01) \\ f(11) &= 0.5 \times 0 + 0.5 f(11) \Rightarrow f(11) = 0 \end{aligned}$$

得  $\begin{cases} f(00) = 1 \\ f(01) = 1 \\ f(10) = 1 \\ f(11) = 0 \end{cases} P = \frac{1}{4}(1 + 1 + 1 + 0) = 0.75$

5°  $A = (1, 0, 0)$

$$\begin{aligned} f(00) &= 0.5 f(00) + 0.5 f(01), f(00) = f(01) \\ f(01) &= 0.5 f(10) + 0.5 f(11) \\ f(10) &= 0.5 \times 100\% + 0.5 f(01) = 0.5 + 0.5 f(01) \\ f(11) &= 0.5 \times 0\% + 0.5 f(11), f(11) = 0 \end{aligned}$$

得  $\begin{cases} f(00) = \frac{1}{3} \\ f(01) = \frac{1}{3} \\ f(10) = \frac{2}{3} \\ f(11) = 0 \end{cases} P = \frac{1}{4}(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 0) = \frac{1}{3}$

6°  $A = (1, 0, 1)$

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0.5 f(00) + 0.5 f(01), f(00) = f(01) \\ f(01) &= 0.5 f(10) + 0.5 f(11) \\ f(10) &= 0.5 f(00) + 0.5 \times 100\% = 0.5 f(00) + 0.5 \\ f(11) &= 0.5 \times 0\% + 0.5 f(11), f(11) = 0 \end{aligned}$$

得  $\begin{cases} f(00) = \frac{1}{3} \\ f(01) = \frac{1}{3} \\ f(10) = \frac{2}{3} \\ f(11) = 0 \end{cases} \therefore P = \frac{1}{4}(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 0) = \frac{1}{3}$

7°  $A = (1, 1, 1)$

$$\begin{aligned} f(00) &= 0.5 f(00) + 0.5 f(01), f(00) = f(01) \\ f(01) &= 0.5 f(10) + 0.5 f(11) \\ f(10) &= 0.5 f(00) + 0.5 f(01) = f(01) \\ f(11) &= 0.5 \times 0\% + 0.5 \times 100\% = 0.5 \end{aligned}$$

得  $\begin{cases} f(00) = 0.5 \\ f(01) = 0.5 \\ f(10) = 0.5 \\ f(11) = 0.5 \end{cases} P = \frac{1}{4}(0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5) = 0.5$

综上,  $A = (0, 1, 1), P = 0.75$   $8 \times 0 + 4 \times 1 + 2 \times 1 + 0.75 = 6.75$