

YCup Stage 4. 红楼

2026.4.14 11:50-12:30

出题人：焦阳

比赛结束后请将比赛场地复原，否则罚 1 题。

1 村姬观园迷胜景，丫鬟出题赠白银

秋天的大观园里，亭台靠着水，花草树木长得十分好看。刘姥姥第一次进这么气派的园子，眼睛都看不过来了，一路上连连惊叹，觉得哪儿都像画里一样。走到沁芳亭旁边时，她看见白色的照壁上写着一行字，旁边的丫鬟笑着对她说：“姥姥大老远过来不容易，我们府里有个小规矩。您要是能解开这道题，就会给您银子，您拿回去买些吃的穿的、种点田地，日子也能好过些。”

刘姥姥虽然不识字、也不太懂算术，却十分认真，只当这是自己的一次机会，安安静静地听着别人念题目，希望能解开这道题，不白来这大观园一趟。

已知正数 a, b, c 满足 $abc > 1$ ，求

$$\frac{abc(a+b+c+8)}{abc-1}$$

的最小值。

2 虎兕相逢大梦归，鸾凰别去故园空

二月，贾元春来到大观园内省亲。宝玉得知后，连忙拍马赶到。看到姐姐消瘦的面庞，关切地问道：“近些天，宫中的伙食可苛扣了？”元春笑道：“不曾不曾。只是宫中有个三角龙化石，相传由乾隆赠与贾府，却不知其范围大小”宝玉听后，虽懂得一二，但有大半不解。元春看他这般模样，苦笑道：“看看这个，你就明白了。”

设 O 是 $\triangle ABC$ 外心， $\vec{AO} = m(\vec{AB} + \vec{AC})$ ，若 $m \in \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right]$ ，则 $m^2 \cos A$ 的取值范围是？

请你把取值范围中所以可以表示成 $\frac{k}{16000}$ ($k \in \mathbb{Z}$) 的数加起来作为答案。

3 金闺花柳终成芳魂艳魄，完全平方乃可永浴长河

三月，迎春从孙家回来了。宝玉见她满脸泪痕，问道：“姐姐为何哭呢？”迎春呜咽道：“孙家人不待见我，虽园外蜂围蝶阵、鸟语花香，可我心中却半点欢喜也没有。”“姐姐觉得世间什么最安稳？”“我觉得是完全平方数，成双成对，安稳有序。可如今世事纷乱，处处都是约束，倒像这道题一般，有界限才有最值。”

设 x, y, z 为正实数， $\sqrt{x^2 + y^2} + z = 1$ ，那么 $xy + 2xz$ 的最大值是？

4 关卡三千峰峦特起，才及兰亭时运偏消

四月，众姊妹一起在园里放风筝。宝玉放眼望去，只见探春的大凤凰风筝与另外两只风筝高低起落。忽然一阵风来，三只风筝缠在一起，不多时线便断了，越飞越远。众人都觉有趣，唯独宝玉叹道：“世间事物总有先后次序，就像这不等式，总有一个最小的界限。”探春笑道：“既然你这么说，那便来看看这道题。”

对任意正实数 x, y, z ，求使得

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}} + \frac{y}{\sqrt{z+x}} + \frac{z}{\sqrt{x+y}} \geq k\sqrt{x+y+z}$$

成立的最大实数 k 。

5 三春景致终消散，婆娑树果永长生

五月，宝玉行至藕香榭，忽见惜春在作画。宝玉上前打趣道：“怎么老太太让你画的大观园还没画完？”惜春淡淡道：“繁花再盛，终有落时。倒不如这些数理线条，长短有度，离合有常。”宝玉似懂非懂，惜春便指着一道向量题，让他细细思量。

设向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的夹角为 θ ，且满足 $|\mathbf{a}| = 5$ ， $\cos \theta = \frac{4}{5}$ 。若对任意 λ ，都有 $|\mathbf{b} - \lambda \mathbf{a}| \geq |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$ ，则 $|t\mathbf{b} - \mathbf{a}| + |t\mathbf{b} - 2\mathbf{a}|$ ($t \in \mathbb{R}$) 的最小值为？

6 滴翠亭杨妃戏彩蝶，怡红院宝玉倚朱栏

六月，宝玉在滴翠亭中闲坐。忽见宝钗从林中轻步跑出，正追着一只彩蝶。蝴蝶忽上忽下，宝钗也跟着来回走动。宝玉看呆了，宝钗笑道：“宝兄弟发什么呆？你看这世间聚散，就像这些组合数字，再多的变化，也能算出一个定数。”

求

$$\sum_{i=0}^{50} \sum_{j=0}^{50} \binom{50}{i} \binom{50}{j}$$

除以 65 的余数？

7 脱情网绛珠重开慧眼，入星云黛玉逆天改命

注：这道题题目背景是由验题人而非出题人写的，就当黛玉是第九个女生。以黛玉实力，是能拿语文单科年一的，因此请大家不要猜测黛玉对应了谁。

黛玉死后，因为是仙草转世，因此获得了带着记忆重生在 2010 年的机会。她受到了现代教育，不再执着于个体情感，而是努力学习，进入了曹二 28 届 13 班。如今的她，早已不是那个只会葬花垂泪的潇湘妃子——她参加了数学物理化学生物信息地理竞赛集训，每周刷题如麻；语政史地却依然次次考得单科年级第一，数英物化生也屡屡摘星。连老师都叹她“文理兼通，千古奇才”。她彻底摆脱了封建礼教的三纲五常，眼中再无所谓“女子无才便是德”，只有辽阔的未来与滚烫的抱负。这一日，数竞课上发下一道椭圆综合题，黛玉扫了一眼，唇角微扬，提笔便如当年在大观园里题诗一般，行云流水。

$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，椭圆 E 上的点与 $(0, 2)$ 的距离最大值为 4，设 x 轴上 $T(t, 0)$ ，过 T 作 l 交 E 于 X, Y 两点 (X, Y 不重)，若在 E 上存在一点 A 满足 AX 的斜率和 AY 的斜率之和为定值，求 t 的取值范围。

由于各位都是优秀的选手，能看出对称性和 $t \rightarrow \inf$ 的时候成立，所以请给出取值范围在正实数域上的下确界。

8 乘除加减，上有苍穹

八月，七夕佳节，宝玉去凤姐家给巧姐过生日。饭后见巧姐对着一道题苦思冥想。巧姐道：“先生说这题与我名字相合，十分巧妙，可我怎么也算不出来。”宝玉笑道：“姐姐别急，让我看看这天道定数之题。”

设 $f(t) = t^3 + 27t^2 + 199t + 432$ ， a, b, c, x 为互不相同的正实数，且 $f(-a) = f(-b) = f(-c) = 0$ ，同时

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{x}} = \sqrt{\frac{b+c+x}{a}} + \sqrt{\frac{c+a+x}{b}} + \sqrt{\frac{a+b+x}{c}}$$

求 x 的值。

9 画梁春尽落香尘，珠箔灯残叹盛衰

九月，秦可卿离世之后，宝玉常常梦中与她相见。可卿叹道：“宁荣二府看似繁华，实则如这几枚球体，相依相切，亲疏有定，盛极必反，聚散有数。”宝玉心中怅然，便记下了这道关于相切与最值的题目。

已知 W_1, W_2, W_3, W_4, W_5 都在球 W 内部且与 W 相切， W_1, W_2, W_3, W_4 两两相切， W_2, W_3, W_4, W_5 两两相切，若 W_2, W_3, W_4 半径都是 1，求 W_1, W_5 两球半径之和的最小值。

10 熙凤拨珠筹暗线，云窗数点论交情

十月，王熙凤正拿着账本细细算账。宝玉笑道：“凤姐整日算来算去，不累吗？”凤姐叹道：“人心交错，就像平面上的直线，多少交点，多少纠葛，都是定数，半点马虎不得。”

称正整数 n 为好数是指：平面上 10 条直线，无任何 3 条交于一点，且它们一共出现 n 个交点，则所有好数 n 的和为？

11 湘江水逝楚云飞，篱落秋深雁独啼

十一月，湘云来到大观园里顽耍。见宝玉整日混迹于姊妹们身边，无心读书，因劝道：“你啊还是这个惰性不改。如今大了，你就算不愿读书去考举人进士的，也该常会会那些为官做宰的，谈谈讲讲些仕途经济的学问，也好将来应酬事务，日后也有个朋友。”宝玉听了道：“请姑娘到别的屋里坐坐，我这里仔细玷污了你知经济学问的。”湘云苦笑：“真是好心喂了驴肝肺，我自小父母都没了，如今到你们这边坐坐，还受欺负。可知我天生有个多舛的命啊。既然你不喜仕途经济学问，那你就来看看我这道几何吧。”

已知 z_1, z_2, \dots, z_5 为方程 $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = 0$ 的 5 个复根，求下式的值。

$$\sum_{i=1}^5 \frac{z_i}{z_i^2 + 1}$$

12 世外仙姝寂寞林，洞中警幻殷勤信

十二月，宝玉独自一人前去潇湘馆。自从黛玉死后，他便经常来到这里，回味他们之间的点点滴滴。忽然，雷雨大作，一衣袂飘飘的仙女从天而降。宝玉见是警幻仙姑，忙上前作揖问道：“不知姐姐来这凡间做甚？”警幻笑道：“我给你带来了一个好消息。”宝玉忙问道：“什么好消息？”警幻道：“你林妹妹如今竟没有死，只是被困于这离恨天灌愁海放春山遣香洞中。你还不快跟我回到仙界去，救出你那林妹妹。”宝玉忙喊道：“快，快带我上去。林妹妹，我若救不出你，就变个大忘八，给你驮一辈子的碑去！”

林黛玉，贾宝玉两人打乒乓球打成 14 : 14。问在比赛中除有一次比分相等外林黛玉都领先的比分序列有多少种？

13 金钏含冤沉碧井，宝玉叹命寄幽情

金钏含冤而逝，宝玉心下凄楚，叹世间命数如质数，孤高冷寂，却又自有定数。一众离散零落，恰如质数之积，唯有平均之后方得圆满，他便以此为题，暗寄哀思，想用这道题寄托对黛玉之思。

记第 k 个质数为 p_k ，若对于 $n > 1$ 且 $n \in \mathbb{Z}^+$ ，有

$$a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k^2 \in \mathbb{N}$$

则 a 最小值为？