YCup Stage 4. Sol

1 陈洛炜、卓成杰。$2\sim6,8,11$ 卓成杰。7 焦阳。其他题 AI。

敲 markdown 真累啊。太难打的我摆了。

1

$$\text{Ys}=\frac{abc(a+b+c+8)}{abc-1}\geq\frac{abc(3\sqrt[3]{abc}+8)}{abc-1}$$

设 $f(x)=\frac{x(3x^{\frac{1}{3}}+8)}{x-1}$。

求导，

$$f'(x)=\frac{(x-1)(4x^{\frac{1}{3}}+8)-x(3x^{\frac{1}{3}+8})}{(x-1)^2}=\frac{x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}-8}{x-1}=0$$

解得 $x=8$，$f(x)_{\min}=16$。

1. 正数 a, b, c 满足 abc > 1 则 $\frac{abc(a+b+c+8)}{abc-1}$ 最小值为？

$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$ 当且仅当 $a=b=c$ 时取等

令 $x=\sqrt[3]{abc}>1$

则 原式 $\ge \frac{x^3(3x+8)}{x^3-1}$

（PS：如果 a, b, c 无法瞪眼法直接看出答案，你在这里完全可以用计算器函数表格了.）

法1 设最小值为 m

$$\frac{x^3(3x+8)}{x^3-1} \ge m \Rightarrow 3x^4+(8-m)x^3+m \ge 0.$$

接下来就要求导了. 哪怕不会求导也可以推出类似的方法

不等式要取等，则其图像在等号点与x轴相切。

凭借直觉，能感受到这个多项式必含完全平方因式 $(x-r)^2$，且 $r>1$.

∴ 设 $3x^4+(8-m)x^3+m=(x-r)^2(3x^2+px+q)$

展开得 $\begin{cases} p=2r \\ q=r^2 \\ m=r^4 \\ r^4-4r-8=0 \end{cases}$

分解 $r^4-4r-8=0$ 得 $(r-2)(r^3+2r^2+4r+4)=0.$

∵ $r>1$ ∴ $r^3+2r^2+4r+4>0$

∴ $r=2$

∴ $m=r^4=16$，$x=2$，$abc=8$，当且仅当 $a=b=c=2$ 时值为16

法2. 用卡西欧函数表格可大致看出最小值应为16，以下为证明:

证 $\frac{x^3(3x+8)}{x^3-1} \ge 16$ 对任意 $x>1$ 成立

$\frac{x^3(3x+8)}{x^3-1}-16=\frac{3x^4-8x^3+16}{x^3-1}$ ∴ 需证 $3x^4-8x^3+16 \ge 0$

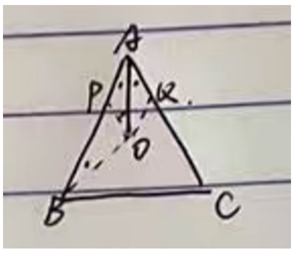
$3x^4-8x^3+16=(x-2)^2(3x^2+4x+4)$

$3x^2+4x+4$ 恒 >0，$(x-2)^2 \ge 0$

∴ $\frac{x^3(3x+8)}{x^3-1} \ge 16$ 恒成立 当且仅当 $x=2$ 时取等.

clw 自己发明了求导。

2



$\angle PAO = \angle QAO$。$m = \frac{|AP|}{|AO|}^2 = \frac{1}{4\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{1}{2\cos A + 2}$。

因而，$\cos A = \frac{\frac{1}{m}+2}{2}$。原式为 $\frac{m-2m^2}{2}$，取值范围 $[\frac{1}{18}, \frac{1}{16})$。

3

设 $x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha, z = 1-r, r \in (0,1), \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$。

$$\begin{gathered}
\mathrm{Ys} = r^2 \sin\alpha\cos\alpha + 2r(1-r)\cos\alpha = t \\
(\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos\alpha)r^2 + 2\cos\alpha r - t = 0 \\
\Delta = 4\cos^2\alpha + 4t(\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos\alpha) \geq 0 \\
\cos\alpha + t\sin\alpha \geq 2t, \sqrt{t^2+1} \geq 2t
\end{gathered}$$

所以，$t \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$。

4

设 $S = x+y+z$，有

$$\frac{x}{\sqrt{S-x}} + \frac{y}{\sqrt{S-y}} + \frac{z}{\sqrt{S-z}} \geq k\sqrt{S}$$

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{S-x}}$，熟知 $f(x)$ 在 $(0,s)$ 上下凸。由琴生不等式知，

$$LHS \geq 3f(\frac{x+y+z}{3}) = 3f(\frac{S}{3}) = \frac{S}{\sqrt{\frac{2}{3}S}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{S}$$

故 $k_{\max} = \frac{\sqrt{6}}{2}$。

5

熟知此时 $\mathbf{b}$ 是 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上的投影。根据将军饮马模型知：$\min = \sqrt{4^2+9^2} = \sqrt{97}$。

6

$$\mathrm{Ys} = \sum_{i=0}^{50}\sum_{j=0}^{50}\binom{50}{i}\binom{50}{j} = \left(\sum_{i=0}^{50}\binom{50}{i}\right)^2 = (2^{50})^2 = 2^{100}$$

$2^{12} \bmod 65 = 1$，$\mathrm{Ys} = 2^{100 \bmod 6} = 16 \pmod{65}$

7

易得 $Y = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$。

设 $A(x_0,y_0), X(x_1,y_1), Y(x_2,y_2)$。设直线 $l: x = \lambda y + t$。

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = \lambda y + t \end{cases}$$

$\therefore (\lambda^2+2)y^2 + 2t\lambda y + t^2 - 8 = 0$。

- $\Delta = 4t^2\lambda^2 - 4(t^2-8)(\lambda^2+2) > 0$

- $y_1+y_2=\dfrac{-2t\lambda}{\lambda^2+2}$，$y_1y_2=\dfrac{t^2-8}{\lambda^2+2}$。

因而，$x_1+x_2=\dfrac{4t}{\lambda^2+2},x_1x_2=\dfrac{2t^2-8\lambda^2}{\lambda^2+2},x_1y_2+x_2y_1=-\dfrac{16\lambda}{\lambda^2+2}$。

$K_{AX}+K_{AY}=\dfrac{y_0-y_1}{x_0-x_1}+\dfrac{y_0-y_2}{x_0-x_2}=\dfrac{2\lambda^2x_0y_0+2\lambda(tx_0-8)+4y_0(x_0-t)}{(x_0^2-8)\lambda^2+2(x_0-t)^2}$。

$\therefore x_0=\dfrac{8}{t}$。$\therefore \dfrac{2x_0y_0}{x_0^2-8}=\dfrac{4y_0(x_0-t)}{2(x_0-t)^2}=\dfrac{2y_0}{x_0-t}$。

因为 $x_0\in(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$，所以 $t>2\sqrt{2}$ 或 $t<-2\sqrt{2}$。

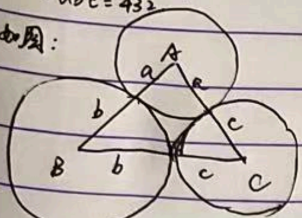
定值 $\dfrac{2y_0}{x_0-t}$。

8

$t^3+27t^2+199t+432=0$. $-a, -b, -c$.

$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=27. \\ ab+bc+ca=199. \\ abc=432 \end{cases}$

如图：



⊙A、⊙B、⊙C两两内切.

$\begin{cases} (a+b)^2+(b+c)^2-(c+a)^2=2[b(a+b+c)-ac]=2(27b-ac)\ \boxed{>0} \\ (b+c)^2+(c+a)^2-(a+b)^2=2(27c-ab)\ \boxed{>0} \\ (c+a)^2+(a+b)^2-(b+c)^2=2(27a-bc)\ \boxed{>0} \end{cases}$

由于解集结为$\{16.556, 6.305, 4.138\}$.

$4.138\times27>16.556\times6.305$ 成立

故△ABC是锐角三角形.

作⊙O外切于⊙A、⊙B、⊙C. 则O在△ABC内部.

设r为⊙O半径.

对△ABC: $p=a+b+c$. $S_{\triangle ABC}=\sqrt{abc(a+b+c)}$.

对△ADB: $p=r+a+b$. $S_{\triangle ADB}=\sqrt{rab(r+a+b)}$.

对△BDC: $p=r+b+c$. $S_{\triangle BDC}=\sqrt{rbc(r+b+c)}$.

对△CDA: $p=r+c+a$. $S_{\triangle CDA}=\sqrt{rca(r+c+a)}$.

$\Rightarrow$ 由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle BDC}+S_{\triangle CDA}$

$\sqrt{abc(a+b+c)}=\sqrt{rab(r+a+b)}+\sqrt{rbc(r+b+c)}+\sqrt{rca(r+c+a)}$.

$\sqrt{\frac{a+b+c}{r}}=\sqrt{\frac{r+a+b}{c}}+\sqrt{\frac{r+b+c}{a}}+\sqrt{\frac{r+c+a}{b}}$.

即为原方程.

此时由笛卡尔定理.

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{r}\right)^2=2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{r^2}\right)$.

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2+2\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{r^2}=2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{2}{r^2}$.

$\frac{1}{r^2}-2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\frac{1}{r}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=0$.

$\Delta=4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-4\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\right]=16\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$.

$\frac{1}{r}=\frac{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+4\sqrt{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}}}{2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+2\sqrt{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}}$.

$\Rightarrow \frac{1}{r}=\frac{ab+bc+ca}{abc}+2\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}}=\frac{199}{432}+2\sqrt{\frac{27}{432}}=\frac{415}{432}$

$\Rightarrow r=\frac{432}{415}$.

9

本题使用三维空间中的笛卡尔球定理。

5个相互外切的球（其中大球W包含另外4个小球，因此大球半径取负曲率）的曲率满足：$3\sum^{5} k^2 = \left(\sum^{5} k\right)^2$

球 W_2, W_3, W_4 半径均为 1，所以曲率 $k_2 = k_3 = k_4 = 1$。

因为 W, W_1, W_2, W_3, W_4 是5个相切的球，设 W 的曲率为 k（$k < 0$），W_1 的曲率为 k_1。

代入公式：$3(k^2 + k_1^2 + 3) = (k + k_1 + 3)^2$。

展开化简得：$k^2 + k_1^2 - kk_1 - 3k - 3k_1 = 0$。

同理，对于球 W_5，曲率 k_5 也满足相同的方程。

可见 k_1, k_5 是关于 t 的二次方程 $t^2 - (k+3)t + (k^2 - 3k) = 0$ 的两根。

我们要求 $r_1 + r_5 = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_5} = \frac{k_1 + k_5}{k_1 k_5} = \frac{k+3}{k^2 - 3k}$ 的最小值。

要求根是实数，判别式 $\Delta = (k+3)^2 - 4(k^2 - 3k) = -3k^2 + 18k + 9 \geq 0 \implies k^2 - 6k - 3 \leq 0$。

由于 $k < 0$（外切包含），解得 $3 - 2\sqrt{3} \leq k < 0$。

函数 $f(k) = \frac{k+3}{k^2 - 3k}$ 在该区间单调递增，故在边界 $k = 3 - 2\sqrt{3}$ 处取得最小值。

代入 $k = 3 - 2\sqrt{3}$ 得：$\frac{3 - 2\sqrt{3} + 3}{(3 - 2\sqrt{3})^2 - 3(3 - 2\sqrt{3})} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$。

10

哦哈哈。我今天说有高妙做法，可能没有。

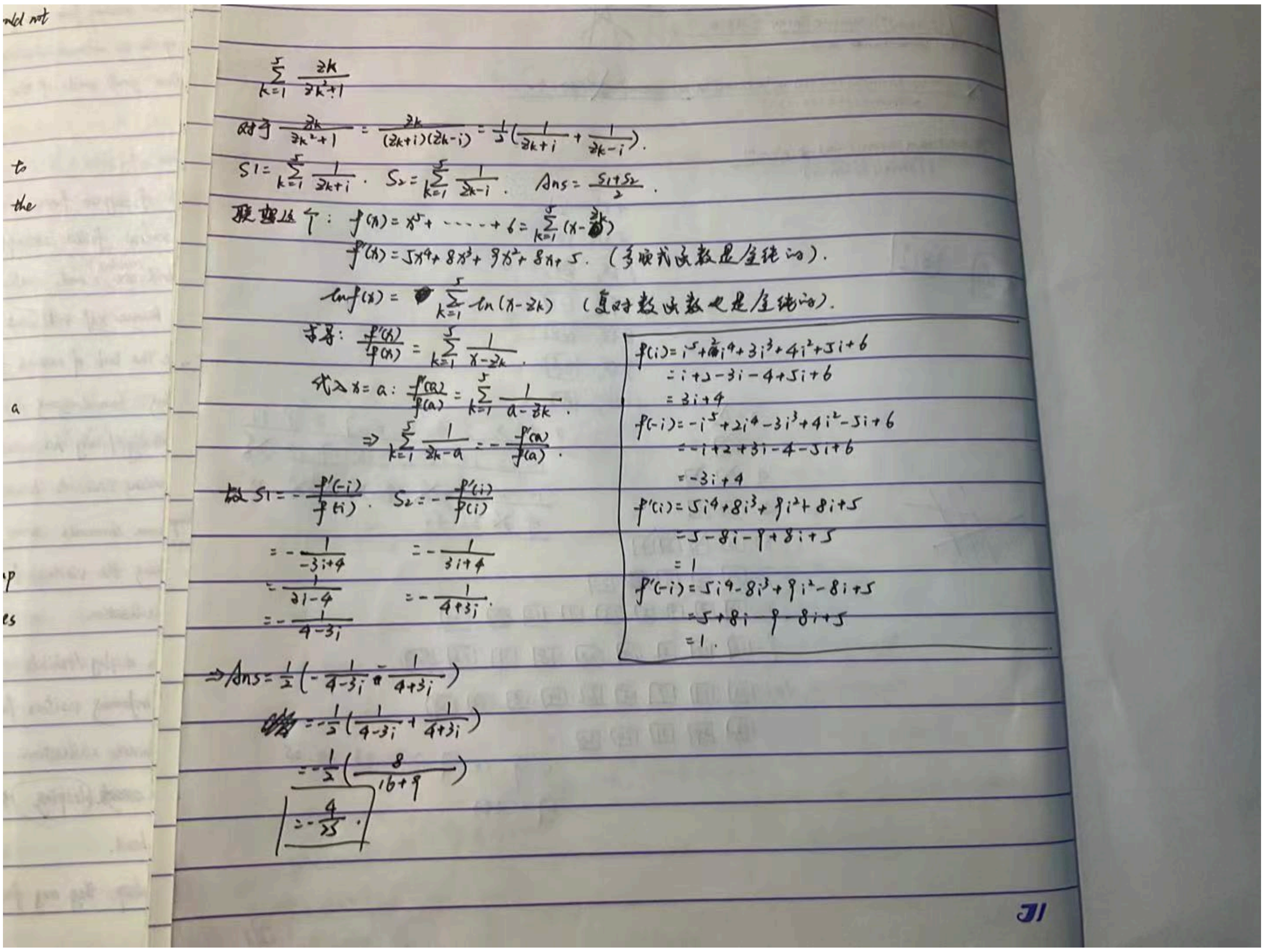
$$n = \binom{10}{2} - \sum \binom{k_i}{2}$$

其中 $\sum k_i = 10$。

可得 $n = \{0, 9, 16, 17, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45\}$。

和为 819。

11



$\sum_{k=1}^{5} \frac{z_k}{z_k^2+1}$

对于 $\frac{z_k}{z_k^2+1} = \frac{z_k}{(z_k+i)(z_k-i)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z_k+i} + \frac{1}{z_k-i}\right)$.

$S_1 = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{z_k+i}$. $S_2 = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{z_k-i}$. $Ans = \frac{S_1+S_2}{2}$.

考虑这个：$f(x) = x^5 + \cdots + 6 = \prod_{k=1}^{5}(x - z_k)$

$f'(x) = 5x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 8x + 5$.（多项式函数是全纯的）.

$\ln f(x) = \sum_{k=1}^{5} \ln(x - z_k)$（复对数函数也是全纯的）.

求导：$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{x - z_k}$.

代入 $x = a$：$\frac{f'(a)}{f(a)} = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a - z_k}$.

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{z_k - a} = -\frac{f'(a)}{f(a)}$.

故 $S_1 = -\frac{f'(-i)}{f(-i)}$. $S_2 = -\frac{f'(i)}{f(i)}$

$= -\frac{1}{-3i+4}$ $\quad = -\frac{1}{3i+4}$

$= \frac{1}{3i-4}$ $\quad = -\frac{1}{4+3i}$.

$= -\frac{1}{4-3i}$

$f(i) = i^5 + 2i^4 + 3i^3 + 4i^2 + 5i + 6$

$= i + 2 - 3i - 4 + 5i + 6$

$= 3i + 4$

$f(-i) = -i^5 + 2i^4 - 3i^3 + 4i^2 - 5i + 6$

$= -i + 2 + 3i - 4 - 5i + 6$

$= -3i + 4$

$f'(i) = 5i^4 + 8i^3 + 9i^2 + 8i + 5$

$= 5 - 8i - 9 + 8i + 5$

$= 1$

$f'(-i) = 5i^4 - 8i^3 + 9i^2 - 8i + 5$

$= 5 + 8i - 9 - 8i + 5$

$= 1$.

$\Rightarrow Ans = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4-3i} - \frac{1}{4+3i}\right)$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4-3i} + \frac{1}{4+3i}\right)$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{8}{16+9}\right)$

$\boxed{= -\frac{4}{25}.}$

12

这相当于求从 $(0,0)$ 到 $(14,14)$ 恰好经过一次对角线的路径数。
由卡特兰数的性质，这等于 $\sum_{k=1}^{13} C_{k-1}C_{14-k-1} = C_{13}$。$C_{13} = \frac{1}{14}\binom{26}{13} = 742900$。

13

经逐个测试 $n = 2, 3, \ldots$。当 $n = 19$ 时，前 19 个质数的平方和 $2^2 + 3^2 + \cdots + 67^2 = 24966$。
$24966/19 = 1314$。