

YCup Stage 5. 考后总结

4.28 11:50-12:30

出题人：陈洛炜、赵易仁、王韬淳

1 双鱼座

由于有人说双鱼座都是恋爱脑还成绩不好，而你偏偏是双鱼座，有着清醒的脑子而且成绩没有不好。由于你觉得这刻板印象比出题人还离谱。你越想越气，于是你决定出道题。

在双曲线 $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{13} = 1$ 的一支上有三个点 $A(x_1, y_1), B(x_2, 6), C(x_3, y_3)$ 与焦点 $F(0, 5)$ 的距离成等差数列。

求 AC 的垂直平分线经过的定点坐标的横纵坐标之和。

2 我们还有明天吗？

“有些人的最后一面是见不完的。”这句话有两种解释。

令你和她藕断丝连的关系可以用函数 $f(x)$ 来描述，其中

$$f(x) = \frac{\ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}) + xe^{(x-1)^2} + x \cos^2(\pi x)}{e^{(x-1)^2} + \cos^2(\pi x)} + (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \cos(\pi x)$$

两种解释分别对应你和她关系的最大值 M 和最小值 m 。

求 $M + m$ 。

3 简单题

出题人说大家应该都会偏导数，所以他出了这道题考验你：已知 a, b, c 是三个实数，令 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 。

已知 $f(x)$ 满足如下条件：

- 任意 x 满足 $|x| \leq 1$ ，均有 $|f(x)| \leq 1$
- $\max_{|x| \leq 2} |f(x)| = 7$

求符合条件的所有解析式 $f(x)$ 的 $4a + 2b + c$ 之和。

4 下头男

你和下头男在玩一场游戏。每局游戏下头男获胜的概率为 $\frac{114}{2026}$ 。

一开始，你们约定单局定胜负。作为下头男，如果他输了，他就会赖皮，将规则临时改为三局两胜。

如果三局两胜输了，他就会将规则改为五局三胜。如果五局三胜输了，他就会将规则改为七局四胜，以此类推。

求下头男在有限局内最终赢下这场游戏的概率。

5 在未来找你

你和她现在都在 A ，你的未来在 B ，她的未来在 C 。 $\triangle ABC$ 是一个边长为 1 的正三角形。

从你的未来 B 到她的未来 C ，你会在所有 2026 等分点遇到困难，记为 $P_1, P_2, \dots, P_{2025}$ 。

求 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_1} \cdot \overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{AP_2} \cdot \overrightarrow{AP_3} + \dots + \overrightarrow{AP_{2025}} \cdot \overrightarrow{AC}$ 。

6 破心防宝钗暗传灵犀，定神交黛玉终认故人

续 Stage 4 第七题。

黛玉入学后，总觉得同桌安蕙与她有着奇异的默契——论《庄子》、解数学题、对“女子当自立”的信念，处处不谋而合。那份灵魂共振令她恍惚看见蘅芜君的影子，却不敢认，只将疑窦压在心底。期末黄昏，两人并肩站在走廊上，安蕙忽然轻声说：“颦儿？”黛玉浑身一震——蘅芜苑、冷香丸、螃蟹宴上的诗稿，那个永远含笑周全的女子，瞬间涌上心头。“宝钗？”安蕙微微一笑：“那是以前。现在有了新身份、新命运。往前看吧。”

在 $\triangle ABC$ 中， $AC = 6, BC = 7, \cos A = \frac{1}{5}$ 。 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，若 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ ，其中 $0 \leq x, y \leq 1$ ，求动点 P 的轨迹所覆盖过的面积。

7 有人说

有人认为，去鸡鸣寺后情侣分手，单身的人再寡三年非常可怜，也有人认为不尽如此。请写一篇文章，谈谈你对此的认识与思考，文体不限，题目自拟，不少于 800 字。

已知 $\triangle ABC$ 的 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边分别是 a, b, c ，且 $a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2 + b^2)$ 。

- 若 c 为最小边，求 $\frac{b}{a}$ 的取值范围。
- 若 c 为最大边，求 $\frac{a+b}{c}$ 的取值范围。

假设一个区间是 $[p, q]$ ， (p, q) ， $(p, q]$ 或 $[p, q)$ 中的任意一种，我们定义它的长度均为 $q - p$ 。

求两小问的范围长度之积。

8 靠近你就靠近了痛苦，远离你就远离了幸福

由于靠近你远离你都难受，所以我无处写下题目背景了。

设 x, y, z 为非负实数， $x + y + z = 1$ ，求 $F = 2x^2 + y + 3z^2$ 的最大值和最小值之积。

9 忆往昔峥嵘岁月稠

曹杨二中社团招新时，道路修复导致拥堵，糖果店趁机清仓甩卖，班主任用谐音替换吸引顾客。员工招聘现场举办擂台游戏，包含决斗、超速检测、染色等环节。编程组则挑战序列询问、编辑字符串和遗失的赋值。生态社展示树的价值，通过树的遍历和树上查询来评估。所有活动热闹非凡。

将所有 n 个社团，编号 $1 \sim n$ 都染上三种颜色之一，若对于任意染色方案都存在两个颜色相同的社团 a, b 使得 $|a - b|$ 是完全平方数，求 n 的最小值。

10 GRINDING...

标题豪到我了，你在练习投篮。

已知你第一球投中了，第二球没投中，接下来每一球投中的概率均为前面投出球的命中率。求你前 100 球恰投中 50 球的概率。

11 又一个三角形

一个函数 $f(x)$ ，如果对于任意一个三角形，只要它的三边长 a, b, c 都在 $f(x)$ 的定义域内，就有 $f(a), f(b), f(c)$ 也是某个三角形的三边长，就称 $f(x)$ 为“保三角形函数”。

若 $F(x) = \sin x, x \in (0, A)$ 是保三角形函数，求 A 的最大值。