YCup Stage 5. 考后总结 Solution

♪ 双鱼座

出题人：陈洛炜。

双曲线方程可以化为 $\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{13}=1$。

由题意可知，A,B,C 三点在双曲线的一支上，即得：

$$\begin{cases}|AF|=ey_1-\frac{12}{5}e,\\ |BF|=6e-\frac{12}{5}e,\\ |CF|=ey_3-\frac{12}{5}e\end{cases}$$

由于等差数列，所以 $2|BF|=|AF|+|CF|$，即 $2\times 6e=ey_1+ey_3$。解得 $y_1+y_3=12$。

设 AC 中点在 $(x_0,6)$，由于 A,C 在双曲线上，所以：

$$\begin{cases}\frac{y_1^2}{12}-\frac{x_1^2}{13}=1\\ \frac{y_3^2}{12}-\frac{x_3^2}{13}=1\end{cases}$$

相减得：

$$12(x_1+x_3)(x_1-x_3)=13(y_1+y_3)(y_1-y_3)$$

整理得：

$$\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}=\frac{12}{13}\cdot\frac{x_1+x_3}{y_1+y_3}=\frac{2x_0}{13}$$

所以 AC 中垂线斜率为 $-\frac{13}{2x_0}$。

则 AC 中垂线方程为：$y-6=-\frac{13}{2x_0}(x-x_0)$，即 $y-6=-\frac{13}{2x_0}\times x+\frac{13}{2}$。

则 $x=0$ 时，$y=\frac{25}{2}$，定点坐标即为 $(0,\frac{25}{2})$。

♪ 我们还有明天吗？

出题人：赵易仁。辅助出题：Gemini 3.1 Pro

> 两种含义各位都看懂了吧。有些人的最后一面在无意识中已经见过了。有些人的“最后一面”会有很多次，你们永远不会放弃对方。希望大家都能或者一些后者描述的挚友。

将函数做平移代换，令 $t=x-1$，考察 $g(t)=f(t+1)-1$。

化简后可得：

$$g(t) = \frac{\ln(t+\sqrt{t^2+1})}{e^{t^2}+\cos^2(\pi t)} + t - t^3\cos(\pi t)$$

观察发现，分母是偶函数，分子中的 $\ln(t+\sqrt{t^2+1})$ 是反双曲正弦函数，属于奇函数；t 和 $t^3\cos(\pi t)$ 均为奇函数。

因此 $g(t)$ 是一个纯奇函数。它的最大值与最小值之和必为 0。

即 $(M-1)+(m-1)=0 \implies M+m=2$。

𝅘𝅥𝅮 简单题

出题人：赵易仁

设 $f(1)=a+b+c=p$，$f(-1)=a-b+c=q$，$f(0)=c=r$。

由 $|p|,|q|,|r|\le 1$ 得，$a=\dfrac{p+q-2r}{2}, b=\dfrac{p-q}{2}, c=r$。

$f(2)=3p+q-3r, f(-2)=3q+p-3r$。由 $m=7$ 知 $|f(2)|=7$ 或 $|f(-2)|=7$。

$f(x)=2x^2-1$ 或 $f(x)=-2x^2+1$。

答案为 0。

𝅘𝅥𝅮 下头男

出题人：王韬淳

令 $p=\dfrac{114}{2026}$。

设甲最终获胜的概率为 x。

- 第一局胜，概率为 p。
- 第一局输，后面净胜两局，概率为 $(1-p)x^2$。

上述两件事互斥，所以 $p+(1-p)x^2=x$，解方程得 $x_1=1, x_2=\dfrac{p}{1-p}$。

为什么 $p<0.5$ 时要舍掉 $x_1=1$，我推荐你感性理解。

原题 Source。

𝅘𝅥𝅮 在未来找你

出题人：陈洛炜

设 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{c}$，$\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$，$\overrightarrow{BC}=\mathbf{a}$。令 $\dfrac{1}{n}\overrightarrow{BC}=\mathbf{p}$。则 $\overrightarrow{AP_k}=\mathbf{c}+k\mathbf{p}$。

则 $\overrightarrow{AP_{k-1}}\cdot\overrightarrow{AP_k}=[\mathbf{c}+(k-1)\mathbf{p}]\cdot(\mathbf{c}+k\mathbf{p})=\mathbf{c}^2+(2k-1)\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}+k(k-1)\mathbf{p}^2$。

有由于 S_n 的定义式，有

$$S_n = n\mathbf{c}^2 + \sum(2k-1)\mathbf{c}\cdot\mathbf{p} + \sum k(k-1)\mathbf{p}^2$$

连续正整数平方和公式、等差数列求和公式：

$$S_n = n\mathbf{c}^2 + n^2\mathbf{c}\cdot\mathbf{p} + \frac{n(n+1)(n-1)}{3}(n\mathbf{p})^2$$

也就是

$$S_n = n\mathbf{c}^2 + n\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} + \frac{n^2-1}{3n}\mathbf{a}^2$$

又由于这是个等边三角形，所以 $\mathbf{c}$ 和 $\mathbf{a}$ 夹角为 $\dfrac{2\pi}{3}$。

所以 $S_n = \dfrac{5n^2-2}{6n}$。

♪ 破心防宝钗暗传灵犀，定神交黛玉终认故人

出题人：陈洛炜

$AB=5 \triangle ABC$ 的内切圆半径 $r = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{18} = \dfrac{6\cdot 5\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2}5}}{18} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$。

而 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}, 0\le x,y\le 1$。所以动点 P 的轨迹是一个平行四边形，面积是 $2S_{\triangle AOB} = \dfrac{10\sqrt{6}}{3}$。

♪ 有人说

出题人：陈洛炜

已知等式 $a^4+b^4+c^4 = 2c^2(a^2+b^2)$，整理可得 $(a^2+b^2-c^2)^2 = 2a^2b^2$，由余弦定理得 $\cos C = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\angle C = 45^\circ$ 或 135°。

第一问：若 c 为最小边，则 $\angle C$ 为最小角，必有 $\angle C = 45^\circ$，且 $\angle A + \angle B = 135^\circ$。
由正弦定理，$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin B}{\sin(135^\circ - B)}$。求得此函数在 $B\in[45^\circ, 90^\circ]$ 上的值域为 $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}]$。区间长度为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。

第二问：若 c 为最大边，则 $\angle C = 135^\circ$，且 $\angle A + \angle B = 45^\circ$。
$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin 135^\circ} = 2\sqrt{2}\sin 22.5^\circ \cos\frac{A-B}{2}$。可求得该取值范围为 $(1, \sqrt{4-2\sqrt{2}}]$。区间长度为 $\sqrt{4-2\sqrt{2}} - 1$。
两区间长度之积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}\times(\sqrt{4-2\sqrt{2}}-1) = \sqrt{2-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}$。

♩ 靠近你就靠近了痛苦，远离你就远离了幸福

出题人：王韬淳

带入消元，$y=1-x-z$，所以 $F=2x^2+1-x-z+3z^2=2(x-\frac{1}{4})^2+3(z-\frac{1}{6})^2+\frac{19}{24}\geq\frac{19}{24}$。

$F(\frac{1}{4},\frac{7}{12},\frac{1}{6})=\frac{19}{24}$。

然后你可以猜出最大值，或者通过 $2x^2+y+3z^2\leq 2x+y+3z\leq 3x+3y+3z=3$。

介绍一种牛逼科技，

固定变量 z，则 $x+y=1-z$。把 z 当常数。

对 $F=2x^2+y+3z^2$，因为 z 是常数，所以只需要求出 $2x^2+y=A$ 的最大值。

其中 $x+y=1-z$，为叙述问题方便，令 $1-z=t$，则 $x+y=t$，$0\leq x,y\leq t$，t 是常数。

因为 $A=2x^2+y=2x^2+t-x$，注意到 $0\leq x\leq t\leq 1$，而二次函数开口向上，顶点处不是最大值，所以 $x=0$ 和 $x=t$ 有一个是最大值。

所以

$$g(z)=A_{\max}=\max\{t,2t^2\}=\begin{cases}t, & (0\leq t\leq\frac{1}{2})\\ 2t^2, & (\frac{1}{2}\leq t\leq 1)\end{cases}$$

还原成原变量，有：

$$g(z)=A_{\max}=\max\{1-z,2(1-z)^2\}=\begin{cases}1-z, & (\frac{1}{2}\leq z\leq 1)\\ 2(1-z)^2, & (0\leq z\leq\frac{1}{2})\end{cases}$$

因而，当 $0\leq z\leq\frac{1}{2}$，$F\leq g(z)+3z^2=2(1-z)^2+3z^2=5z^2-4z+2\leq 2$。

$\frac{1}{2}\leq z\leq 1$ 时，$F\leq g(z)+3z^2=(1-z)+3z^2\leq 3$。

所以 $F_{max}=3$。

♩ 忆往昔峥嵘岁月稠

本题属于“任意型”最值，且条件不提供算法，宜从构造入手。

构造的实质是对集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 进行 3−划分，最朴素的方法是采用“字典排法”：由小到大依次确定 $1,2,\cdots,n$ 的归属，且每个数总是优先归入“代号最小”的集合。

设划分的 3 个集合为 A、B、C，先设 $1\in A$。

因为 $2-1=1^2$，可知 $2\notin A$，设 $2\in B$。进而 $3\in A,4\in B$（优先归入“代号最小”的集合）。

因为 $5-1=2^2,5-4=1^2$，可知 $5\notin A,B$，所以 $5\in C$。进而 $6\in A,7\in B,8\in A,9\in B$。

因为 $10-3=2^2,10-9=1^2$，可知 $10\notin A,B$，所以 $10\in C$。进而 $11\in A,12\in B,13\in A,14\in B$。

因为 $15-11=2^2,15-14=1^2$，可知 $15\notin A,B$，所以 $15\in C$。进而 $16\in A,17\in B,18\in A,19\in B$。

因为 $20-11=2^2,20-19=1^2$，可知 $20\notin A,B$，所以 $20\in C$。进而 $21\in A,22\in B,23\in A,24\in B$。

因为 $25-16=3^2,25-24=1^2$，可知 $25\notin A,B$，所以 $25\in C$。

至此，26 无法归入任何集合：与 A 中 1 不相容；与 B 中 $17,22$ 不相容；与 C 中 $10,25$ 不相容。但未必 26 是最小值，可进行调整。

虽然 A 中只有 1 与 26 不相容，但 1 不能调入 $B(2\in B)$、$C(5\in C)$ 中，所以我们将 17、22 都调入 C(17 与 1 不相容，22 与 6 不相容)，这样，可将 26 归入 B，得到

$$\begin{aligned}A&=\{1,3,6,8,11,13,16,18,21,23,\cdots\},\\B&=\{2,4,7,9,12,14,19,24,26,\cdots\},\\C&=\{5,10,15,17,20,22,25,\cdots\}.\end{aligned}$$

进而 $27-23=2^2,27-26=1^2$，可知 $27\notin A,B$，所以 $27\in C$，得到

$$\begin{aligned}A&=\{1,3,6,8,11,13,16,18,21,23,\cdots\},\\B&=\{2,4,7,9,12,14,19,24,26,\cdots\},\\C&=\{5,10,15,17,20,22,25,27,\cdots\}.\end{aligned}$$

至此，28 无法归入任何集合：与 A 中 $12,19,24$ 不相容；与 B 中 $12,19,24$ 不相容；与 C 中 27 不相容。但未必 28 是最小值，还可进行调整。

因为 A 中只有 3 与 26 不相容，可将 3 调入 C，这样，可将 28 归入 A，得到

$$\begin{aligned}A&=\{1,6,8,11,13,16,18,21,23,28\},\\B&=\{2,4,7,9,12,14,19,24,26\},\\C&=\{3,5,10,15,17,20,22,25,27\}.\end{aligned}$$

至此，无论如何调整，都无法将 29 归入任何集合，所以我们猜想 29 是合乎要求的最小值。

当 $n\leqslant 28$ 时，记 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，将 $A\cap S$、$B\cap S$、$C\cap S$ 中的数分别染红、蓝、黄色，则任何同色数之差的绝对值不是平方数，矛盾。所以 $n\geqslant 29$。

原来的构造如下：

$$\begin{aligned}A&=\{1,4,6,9,12,14,17,19,24,27\},\\B&=\{2,5,7,10,15,20,22,25,28\},\\C&=\{3,8,11,13,16,18,21,23,26\}.\end{aligned}$$

这个构造似乎没有什么规律，也许是采用“尝试+调整”的穷举策略。

下面证明 $n=29$ 合乎要求，令 $S=\{1,2,\cdots,29\}$。

反设 $n=29$ 不合乎要求，则存在 S 的一个 $3-$划分 (A,B,C)，使同一集合中的数都相容。

依次考察每个元素的归属。注意到不相容的数不能在同一集合，我们先将不相容的数对列举出来（用边连接），以便将其放入不同集合中。

因为小于 29 的平方数有 $1,4,9,16,25$，所以当 $a\leqslant 4$ 时（保证 $a+25$ 属于 S），将 $a,a+1,a+4,a+9,a+16,a+25$ 中不相容的数对用边连接，如图 8-2 所示。

由此发现两个三角形 $(a,a+9,a+25),(a,a+16,a+25)$。每个三角形的 3 顶点分别属于不同的集合，从而 $a+9$ 与 $a+16$ 属于同一集合（$1\leqslant a\leqslant 4$）。

取 $a=1$，则 10 与 17 属于同一集合，不妨设 $10,17\in A$。

取 $a=2$，则 11 与 18 属于同一集合，但 $11-10=1^2$，所以 $11\notin A$，不妨设 $11,18\in B$。

取 $a=3$，则 12 与 19 属于同一集合，但 $12-11=1^2$，所以 $12\notin B$；又 $19-10=3^2$，所以 $19\notin A$，所以只能是 $12,19\in C$。

取 $a=4$，则 13 与 20 属于同一集合，但 $20-19=1^2$，所以 $20\notin C$；又 $20-11=3^2$，所以 $20\notin B$，只能是 $20\in A$。

此时 $13,17\in A$，但 $17-13=2^2$，矛盾。

综上所述，n 的最小值为 29。

♪ GRINDING...

出题人：王韬淳

Polya 罐子。

如果你不会，有一种高雅做法

前 n 次投进 i 次的概率可以表达为：$f_{n,i}$。

前 $n-1$ 次投进 $i-1$ 次，最后一次投进了：$f_{n-1,i-1}\times\dfrac{i-1}{n}$。

前 $n-1$ 次投进 i 次，最后一次没投进：$f_{n-1,i}\times\dfrac{n-i}{n}$。

发现 $f_{2,1}=1,f_{3,1}=f_{3,2}=\dfrac{1}{2}$。我们大胆猜测，$f_{n,i}$ 均为 $\dfrac{1}{n-1}$。

归纳一下发现是对的。

答案是 $\dfrac{1}{99}$。

♪ 又一个三角形

出题人：陈洛炜

一方面，若 $A > \frac{5\pi}{6}$，下证 $F(x)$ 不是“保三角形函数”。

取 $\frac{\pi}{2}$，$\frac{5\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6} \in (0, A)$，显然这三个数可作为一个三角形的三边长，但

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

显然 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$ 不能作为任何一个三角形的三边长，故 $F(x)$ 不是“保三角形函数”。

另一方面，以下证明 $A = \frac{5\pi}{6}$ 时，$F(x)$ 是“保三角形函数”。

对任意三角形的三边 a, b, c，若 $a, b, c \in \left(0,\ \frac{5\pi}{6}\right)$，则分类讨论如下：

情况 ① $a + b + c > 2\pi$。

此时

$$a > 2\pi - b - c > 2\pi - \frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{3},$$

同理，$b, c > \frac{\pi}{3}$。

因此 $a, b, c \in \left(\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{6}\right)$，故

$$\sin a,\ \sin b,\ \sin c \in \left(\frac{1}{2},\ 1\right].$$

于是

$$\sin a + \sin b > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \geq \sin c.$$

同理可证其余两式，所以 $\sin a$，$\sin b$，$\sin c$ 可作为某个三角形的三边长。

情况 ② $a + b + c < 2\pi$。

此时 $\frac{a+b}{2} + \frac{c}{2} < \pi$，可分两种情况讨论：

1. 当 $\frac{a+b}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ 时，由于 $a + b > c$，所以

$$0 < \frac{c}{2} < \frac{a+b}{2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

由 $\sin x$ 在 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调性可得

$$0 < \sin\frac{c}{2} < \sin\frac{a+b}{2} \leq 1.$$

2. 当 $\dfrac{a+b}{2}>\dfrac{\pi}{2}$ 时，有

$$0<\frac{c}{2}<\pi-\frac{a+b}{2}<\frac{\pi}{2},$$

同样由 $\sin x$ 在 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的单调性可得

$$0<\sin\frac{c}{2}<\sin\frac{a+b}{2}<1.$$

总之，总有

$$0<\sin\frac{c}{2}<\sin\frac{a+b}{2}\leq 1.$$

又由 $|a-b|<c<\dfrac{5\pi}{6}$ 及余弦函数在 $(0,\ \pi)$ 上单调递减，得

$$\cos\frac{a-b}{2}=\cos\frac{|a-b|}{2}>\cos\frac{c}{2}>\cos\frac{5\pi}{12}>0.$$

于是

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}>2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}=\sin c.$$

同理可证 $\sin b+\sin c>\sin a$ 与 $\sin c+\sin a>\sin b$，所以 $\sin a$，$\sin b$，$\sin c$ 也是某个三角形的三边长。

综合以上两种情况，当 $A=\dfrac{5\pi}{6}$ 时，$F(x)=\sin x$ 是“保三角形函数”。

结论：A 的最大值为 $\dfrac{5\pi}{6}$。