

YCup Stage 6. 刘慈欣

2026.5.13 11:50-12:30, 命题人: 卓成杰

本场比赛的第 13 题属于解谜题, 不计入实时榜单, 不影响罚时, 但提交次数正常计算, 答对的队伍可以获得出题人赠送的 1 人民币奖励。

你需要根据【如何提交】部分将答案进行处理后再提交答案, 若没有【如何提交】则直接提交答案即可

【贴士】费马小定理: 对于正整数 a 与素数 p , 必有 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

鲸歌

“我们死在谁手里?”当水已淹到下巴时, 沃纳问。

“捕鲸船。”霍普金斯回答。

你是捕鲸小队的一员, 为了阻止霍普金斯和沃纳大叔交易完成后返程, 你需要知道蓝鲸的轨迹。

【形式化题意】平面直角坐标系 xOy 中, $C: (x+1)^2 + y^2 = 16$, A 为圆所在平面内一点。 P 在圆 C 上运动, AP 的中垂线与直线 CP 交于点 Q 。点 A 在不同位置上时, Q 的轨迹不同。试求出所有轨迹。

【如何提交】有一个二进制数 $(a_1a_2a_3a_4a_5)_2$, 其中, 当且仅当轨迹可以是某种形状时 $a_k = 0$, 否则 $a_k = 1$ 。这 5 位对应的形状分别为: 点、圆、椭圆、抛物线、双曲线。你应该提交这个二进制数转为十进制后的结果。

流浪地球

我没见过黑夜, 我没见过星星, 我没见过春天、秋天和冬天。

我出生在刹车时代结束的时候, 那时地球刚刚停止转动。

这一次的白昼太久了, 地球不转了。地球还会转吗? 至少说, 等我死了, 地球应该不用担心一次太长的白天, 因为那时就没有白天了。我想要慢慢地偷些能量来, 不管是多还是少。到第 2017 年之前, 我的后代能得到多少能量?

【形式化题意】求 $\sum_{k=0}^{2017} \frac{5 + \cos \frac{k\pi}{1009}}{26 + 10 \cos \frac{k\pi}{1009}}$ 的值。

【如何提交】保证答案是一个正有理数, 你需要在保持数的大小不变的情况下, 将分子变为 2018 的倍数, 并且分子分母的和最小, 记分子分母分别为 p, q , 请给出 $\frac{p}{2018} + q + 1$ 对 139 取模的结果。

地火

这里已看不到一个人了, 刘欣的脚已被烫得起了皮, 身上的汗已几乎流干, 艰难的呼吸使他到了休克的边缘, 但他的意识是清楚的, 他用生命最后的能量向最后的目标走去。那个井口喷出的地火的红色光芒在召唤着他, 他到了, 他笑了

.....

“爸爸, 我替您下井了。”

你是空中那名直升机驾驶员, 你想要阻止他, 只有一个有意义的操作才能挽回他.....

【形式化题意】从 1 ~ 2006 中随机选择三个不同的整数, 求它们在排序后成递增等差数列的概率。

【如何提交】保证答案是一个正有理数。将这个有理数化简之后, 给出分子分母的和。

地球大炮

“他的身体长时间处于失重状态中.....这样的折腾使他年老的心脏变得很脆弱，他在一次坠落中死于心脏病，当时没人注意到，于是他的遗体又在地球隧道中运行了两天，密封的能量耗尽，停止制冷，地球隧道成了他的火葬炉，遗体在最后一次通过地心时被烧成了灰。我相信，你儿子对于这个归宿是很满意的。”

南极庭院一时变得荒诞可笑，沈渊落入了深渊.....你认为事情本不该这样，你想要打开对地球隧道的封锁。你身在悉尼，你需要直线抵达一个关键面，你只知道纽约、上海、伦敦都在那个平面上。你需要挖一个多长的通道呢？

【形式化题意】求出纽约、上海、伦敦所在平面与悉尼间的距离。地球半径取 6400km，纽约经纬度 (40°N , 75°W)，上海经纬度 (30°N , 120°E)，伦敦经纬度 (50°N , 0°)，悉尼经纬度 (30°S , 150°E)。

【如何提交】以千米为单位，将你的答案除以 400，并四舍五入到整数。提交你得到的整数。

混沌蝴蝶

他点燃了桶中的汽油，然后坐在雪地上，看着升腾的火苗，这是普通的火苗，不是敏感点的火苗，不会给他的祖国带去阴云和浓雾了.....

你看着蝴蝶的翅膀，上面的纹路好像一条穿心线，你想看看这个区域的面积能有多大.....

【形式化题意】等腰三角形 OAB 中， $|OA| = |OB|$ ， P, Q 分别在边 OA, OB 上。设 $\overrightarrow{OP} = h\overrightarrow{OA}$ ， $\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OB}$ ， G 为三角形 OAB 的重心，直线 PQ 经过点 G ，求 $\frac{S_{\Delta OPQ}}{S_{\Delta OAB}}$ 的取值范围。

【如何提交】将最大值和最小值相乘得到既约分数，你需要给出这个既约分数的分子分母的平方和作为结果。

乡村教师

他知道，自己生命的蜡烛已燃到根上，棉芯倒下了，把最后的一小块蜡全部引燃了，一团比以前的烛苗亮十倍的火焰熊熊燃烧起来。

这是李老师生命中的最后时刻，他的病床边聚集着一批懵懂的孩子。牛顿三定律好像不够，对，不够，远远不够.....

【形式化题意】已知集合 $S = \{1, 2, \dots, 280\}$ ， $n \in \mathbb{N}$ 。若 S 的所有 n 元子集中都含有 5 个两两互素的数，求出这样的 n 的最小值。

【如何提交】你需要把你的答案减一再提交。

宇宙坍塌

“还有一分钟，现在无论做什么，都不会对将来产生后果，大家可以做各自喜欢的事情而不必顾虑将来，在这个时间里已经没有将来了。”

蓝移，开始了。时间开始倒流，你的脑海里没有未来，一切虽然在重演，但是你不会记得。关系正在反向迭代，就像递归最终的不断回退。该明朗了，它到底是什么样的？

【形式化题意】给定函数 $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ ，在求出 $f^{(n)}(x)$ 的表达式后，求 $2 - \frac{1}{f^{(10)}(\frac{1}{3})}$ 的值。

【如何提交】保证答案是正有理数（分母可以为 1），将分子对 127 取模，即是你需要提交的结果。

信使

年轻人已拉开房门，他转过身来微笑着，似乎带着歉意。

“教授，上帝确实掷骰子。”

老人原先的解脱顿时消失了，老人拿起了他的小提琴，将他最后的理想都融入了乐曲之中。乐曲的波纹很有规律，像正弦波，又像余弦波，你分辨不清，就姑且认为是两者交织的结果。

【形式化题意】设 $x, y \in \mathbb{R}$ ，满足 $\sin x + \sin y = \frac{64}{65}$ ， $\cos x + \cos y = \frac{8}{65}$ ，求 $\tan(x + y)$ 的值。

【如何提交】保证答案是负有理数 $-\frac{p}{q}$ ，其中 p, q 为既约正整数，给出 $pq - \sqrt[p]{p}$ 作为结果。

朝闻道

当宇宙的和谐之美一览无遗地展现在你面前时，生命只是一个很小的代价。

那一日，科学家们集体走向了真理祭坛，或许不可能有人知道它们听到了什么。但是，朝闻道，夕死可矣。或许在纯粹的理性世界里，真理就只是一个表达式，一年过去了，就是清算表达式的时候到了。哦，已经是 2033 年了。

【形式化题意】求 $\sum_{m=1}^{2033} \sum_{n=m}^{2033} \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} (-1)^{k+m}$ 的值。其中 $\binom{a}{b} = C_a^b$ 。

三体

整个人类历史也是偶然，从石器时代到都没什么重大变故，真幸运。但既然是幸运，总有结束的一天...

这份幸运结束了。这份幸运仅仅持续了 52 年就结束了。

【形式化题意】设集合 $S \subseteq \{1, 2, \dots, 52\}$ 满足任意两个不同元素之和不被 7 整除，求 $|S|$ 的最大值。

黑暗森林

“我知道智子就在身边，但你们对人类的呼唤从不理睬，无言是最大的轻蔑，我们忍受这种轻蔑已经两个世纪了，现在，如果你们愿意，可以继续保持沉默，我只给你们三十秒钟时间。”

三颗太阳仿佛停止了旋转，那三十秒钟好像被无限地拉扯、伸长、膨胀，时间的概念渐渐模糊了。中心的文明急需知道自己的宇宙怎么了。

【形式化题意】平面直角坐标系 xOy 中， $A(-1, 3)$ ， $B(-3, -1)$ ， $C(3, -1)$ ， P 为直线 BC 上的动点。 $PE \parallel OC$ 交 AB 于点 E ， $PF \parallel OB$ 交 AC 于点 F ， $EF \cap OP = K$ 。求 $\frac{|EK|}{|KF|}$ 的值。

【如何提交】保证答案形如 $\frac{a}{b}$ ，其中 a, b 均为正整数且互质。你需要提交 $ab + 1$ 作为答案。

死神永生

“哦，要进画里了，孩子们，走好。”

冥王星地球文明博物馆，也被二维化了。人类渐渐地失去了威胁，二向箔的移动速度也有了指数级增长。

【形式化题意】求满足 $11 \mid (3^n + 7^n + 4)$ ，即 $3^n + 7^n + 4$ 对 11 的最小正剩余为 11 的所有在 $1 \sim 85$ 之间的整数 n 之和。

???

你需要猜出这本书的一个英文名。格式为仅由小写字母构成的字符串，空格可加可不加。