YCup Stage 6. 刘慈欣 题解

鲸歌

【答案】$\boxed{2}$

【解析】对 A 的位置进行分类讨论

当 A 与 C 重合时，点 Q 的轨迹为以 $(-1,0)$ 为圆心，2 为半径的圆

当 A 在圆内且不与 C 重合时，有 $|CQ|+|AQ|=|CQ|+|PQ|=|CP|=4$

所以此时点 Q 的轨迹为以 C,A 为焦点，长轴为 4 的椭圆上

当 A 在圆上时，AP 的中垂线始终与 CP 交与点 C，故点 Q 的轨迹即为点 C

在 A 在圆外时，若 Q 在 CP 延长线上，则 $|CQ|-|AQ|=4$；若 Q 在 PC 延长线上，则 $|AQ|-|CQ|=4$。因此点 Q 的轨迹为以 C,A 为焦点，长轴为 4 的双曲线上

【如何提交】这个二进制数是 $(00010)_2$，转为十进制数即为 2

流浪地球

【答案】$\boxed{122}$

【解析】如果你直接按卡西欧的话，会出现结果是 $\dfrac{2018}{5}$，然而这是不正确的

引理： 对于首一 n 次多项式 $p(x)$，$z_k(0\le k<n)$ 为其 n 个复根，则对于任意复数 z，都有

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z-z_k}=\frac{p'(z)}{p(z)}$$

引理略证： 可记 $p(z)=\prod_{k=0}^{n-1}(z-z_k)$，两边取对数得 $\ln p(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\ln(z-z_k)$

两边求导得 $\dfrac{p'(z)}{p(z)}=\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{z-z_k}$，得证

注意： 由于多项式函数和复数域对数函数均为全纯函数，所以可以在 $\mathbf{C}$ 上求导

首先，将 $\cos\dfrac{k\pi}{1009}$ 变为 $\cos\dfrac{2k\pi}{2018}$，联想到欧拉公式

由于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta$，因此 $\cos\theta=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$

也即 $\cos\dfrac{2k\pi}{2018}=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{2018}\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{-\frac{2k\pi}{2018}\mathrm{i}}}{2}$

同时，$\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{2018}\mathrm{i}}$ 为多项式 $p(x)$ 的根，其中 $p(x)=x^{2018}-1$

记 $z_k=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{2018}\mathrm{i}}$，则 $\cos\dfrac{2k\pi}{2018}=\dfrac{z_k+z_k^{-1}}{2}$

因此 $\dfrac{5+\dfrac{z_k+z_k^{-1}}{2}}{26+10\dfrac{z_k+z_k^{-1}}{2}}=\dfrac{z_k^2+10z_k+1}{10(z_k+5)(z_k+\dfrac{1}{5})}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{2(z_k+5)}-\dfrac{1}{50(z_k+\dfrac{1}{5})}$

原式即为 $\sum\limits_{k=0}^{2017}\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{2017}\dfrac{1}{z_k+5}-\dfrac{1}{50}\sum\limits_{k=0}^{2017}\dfrac{1}{z_k+\dfrac{1}{5}}$

应用引理，原式即为 $\dfrac{2018}{10}-\dfrac{p'(-5)}{2p(-5)}+\dfrac{p'(-\dfrac{1}{5})}{50p(-\dfrac{1}{5})}=\dfrac{2018\times 5^{2017}}{5^{2018}-1}$

【如何提交】$p=2018\times 5^{2017}, q=5^{2018}-1$，故 $\dfrac{p}{2018}+q+1=5^{2017}+5^{2018}\equiv 122 \pmod{139}$

地火

【答案】$\boxed{4013}$

【解析】等差数列必然形如 $a, a+d, a+2d$，对于固定的 d，有 $1\leq a\leq 2006-2d$

因此可行方案数为 $\sum\limits_{d=1}^{1002}(2006-2d)=1002\times 1003$

总方案数为 $\dbinom{2006}{3}=\dfrac{2006\times 2005\times 2004}{6}$

因此概率为 $\dfrac{3}{4010}$

【如何提交】分子分母之和为 $3+4010=4013$

地球大炮

【答案】$\boxed{14}$

【解析】这是一道球面三角学问题，你需要先将经纬度形式的坐标转化为空间直角坐标系，然后就是一道校内立体几何题

具体地，如果点 A 的经纬度坐标为 (θ,φ)，那么转化为空间直角坐标就是 $(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$

然后问题转化为求 D 到平面 ABC 的距离。你可以求出面 ABC 的法向量，然后求 $\overrightarrow{AD}$ 在法向量上的数量投影长度，得到答案为 5671.06

由于赛前提示你要熟练运用卡西欧的向量功能，所以你应该能够在相当短的时间内计算出法向量

计算过程可以参考如下 C++ 代码：

```
#include <cmath>
#include <cstdio>
using namespace std;
const double R = 6400, pi = acos(-1.0);
const double a1 = 40, b1 = -75;
const double a2 = 30, b2 = 120;
const double a3 = 50, b3 = 0;
```

```
const double a4 = -30, b4 = 150;
int main(){
    double t1 = a1 / 180 * pi, l1 = b1 / 180 * pi;
    double t2 = a2 / 180 * pi, l2 = b2 / 180 * pi;
    double t3 = a3 / 180 * pi, l3 = b3 / 180 * pi;
    double t4 = a4 / 180 * pi, l4 = b4 / 180 * pi;
    double x1 = R * cos(t1) * cos(l1), y1 = R * cos(t1) * sin(l1), z1 = R * sin(t1);
    double x2 = R * cos(t2) * cos(l2), y2 = R * cos(t2) * sin(l2), z2 = R * sin(t2);
    double x3 = R * cos(t3) * cos(l3), y3 = R * cos(t3) * sin(l3), z3 = R * sin(t3);
    double x4 = R * cos(t4) * cos(l4), y4 = R * cos(t4) * sin(l4), z4 = R * sin(t4);
    double xab = x2 - x1, yab = y2 - y1, zab = z2 - z1;
    double xac = x3 - x1, yac = y3 - y1, zac = z3 - z1;
    double xad = x4 - x1, yad = y4 - y1, zad = z4 - z1;
    double xn = yab * zac - zab * yac, yn = zab * xac - xab * zac, zn = xab * yac - yab *
xac;
    double fp = sqrt(xn * xn + yn * yn + zn * zn);
    double fq = fabs(xad * xn + yad * yn + zad * zn);
    double ans = fq / fp;
    printf("%.8lf\n", ans);
}
```

【如何提交】$\dfrac{5671.06}{400}\approx 14.17765$，取整为 14

混沌蝴蝶

【答案】$\boxed{85}$

【解析】由于 G 为重心，故 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{b}$

设 $\overrightarrow{OG}=x\overrightarrow{OP}+y\overrightarrow{OQ}=xh\overrightarrow{OP}+yk\overrightarrow{OQ}$

则有 $x+y=1$ 且 $xh=yk=\frac{1}{3}$

故 $\frac{1}{h}+\frac{1}{k}=3(x+y)=3$，得 $k=\frac{h}{3h-1}$

根据 $0<k\le 1, 0<h\le 1$ 可得 $h\in[\frac{1}{2},1]$

故 $\frac{S_{\Delta OPQ}}{S_{\Delta OAB}}=kh=\frac{h^2}{3h-1}=\frac{1}{9}(3h-1+\frac{1}{3h-1}+2)\in[\frac{4}{9},\frac{1}{2}]$

【如何提交】$\frac{4}{9}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$，$2^2+9^2=85$

乡村教师

【答案】$\boxed{216}$

【解析】根据【如何提交】部分的提示，我们将答案减一，问题就是 S 存在一个 n 元子集，使得任意五个元素中都有两个不互素，求 n 的最大值

容易想到这个子集应该塞满 $2,3,5,7$ 的倍数，那么这个可以容斥计算

$$\lfloor\frac{280}{2}\rfloor+\lfloor\frac{280}{3}\rfloor+\lfloor\frac{280}{5}\rfloor+\lfloor\frac{280}{7}\rfloor=329$$

$$\lfloor\frac{280}{6}\rfloor+\lfloor\frac{280}{10}\rfloor+\lfloor\frac{280}{14}\rfloor+\lfloor\frac{280}{15}\rfloor+\lfloor\frac{280}{21}\rfloor+\lfloor\frac{280}{35}\rfloor=133$$

$$\lfloor\frac{280}{30}\rfloor+\lfloor\frac{280}{42}\rfloor+\lfloor\frac{280}{70}\rfloor+\lfloor\frac{280}{105}\rfloor=9+6+4+2=21$$

$$\lfloor\frac{280}{210}\rfloor=1$$

因此这样 n 的最大值为 216，原题中，n 的最小值即为 217

【如何提交】参照【解析】，答案减一为 216

宇宙坍缩

【答案】$\boxed{5}$

【解析】是一道考察不动点原理的基础练习题，不会做的好好反思（而且你可以直接手动迭代找规律）

先解方程 $\dfrac{x^2}{2x-1}=x$，解得 $x=0$ 或 $x=1$

于是你可以构造出 $\varphi(x)=\dfrac{x-1}{x}$，得 $\varphi^{-1}(x)=\dfrac{1}{1-x}$

根据 $f(x)=\varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$，代入解得 $g(x)=x^2$

所以有 $f^{(n)}(x)=\varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x)))=\dfrac{1}{1-(1-\frac{1}{x})^{2^n}}$

得 $2-\dfrac{1}{f^{(10)}(\frac{1}{3})}=1+2^{2^{10}}$

【如何提交】$1+2^{2^{10}}\equiv 5 \pmod{127}$

信使

【答案】$\boxed{1006}$

【解析】根据和差化积，可以知道

$$\begin{cases}2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{64}{65}\\[2ex] 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{8}{65}\end{cases}$$

两式相除得到 $\tan\dfrac{x+y}{2}=8$

故 $\tan(x+y)=\dfrac{2\tan\dfrac{x+y}{2}}{1-\tan^2\dfrac{x+y}{2}}=\dfrac{2\times 8}{1-8^2}=-\dfrac{16}{63}$

【如何提交】$16\times 63-\sqrt[4]{16}=1006$

朝闻道

【答案】$\boxed{2033}$

【解析】本题有不同的做法

法一:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{2033}\sum_{n=m}^{2033}\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}(-1)^{k+m}\\
=&\sum_{m=1}^{2033}\sum_{n=m}^{2033}\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}(-1)^{k+m}\\
=&\sum_{m=1}^{2033}\sum_{n=m}^{2033}\binom{n}{m}\sum_{k=m}^{n}\binom{n-m}{k-m}(-1)^{k+m}\\
=&\sum_{m=1}^{2033}\sum_{n=m}^{2033}\binom{n}{m}\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n-m}{k}(-1)^{k}\\
=&\sum_{m=1}^{2033}\sum_{n=m}^{2033}[n=m]\\
=&2033
\end{aligned}$$

法二:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{2033}\sum_{n=m}^{2033}\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}(-1)^{k+m}\\
=&\sum_{m=1}^{2033}\sum_{n=m}^{2033}\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k+m}\binom{n}{k}\operatorname{cont}\frac{(1+x)^k}{x^m}\\
=&\sum_{m=1}^{2033}\sum_{n=m}^{2033}\operatorname{cont}\frac{(-1)^m}{x^m}\sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(1+x)^k\\
=&\sum_{m=1}^{2033}\sum_{n=m}^{2033}\operatorname{cont}\frac{(-1)^m}{x^m}\left[(-x)^n-\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{n}{k}(1+x)^k\right]\\
=&\sum_{m=1}^{2033}\sum_{n=m}^{2033}\operatorname{cont}\left[(-1)^{n+m}x^{n-m}\right]\\
=&\sum_{m=1}^{2033}\sum_{n=m}^{2033}[n=m]\\
=&2033
\end{aligned}$$

三体

【答案】$\boxed{25}$

【解析】考虑按照对 7 的余数进行分类。应有:

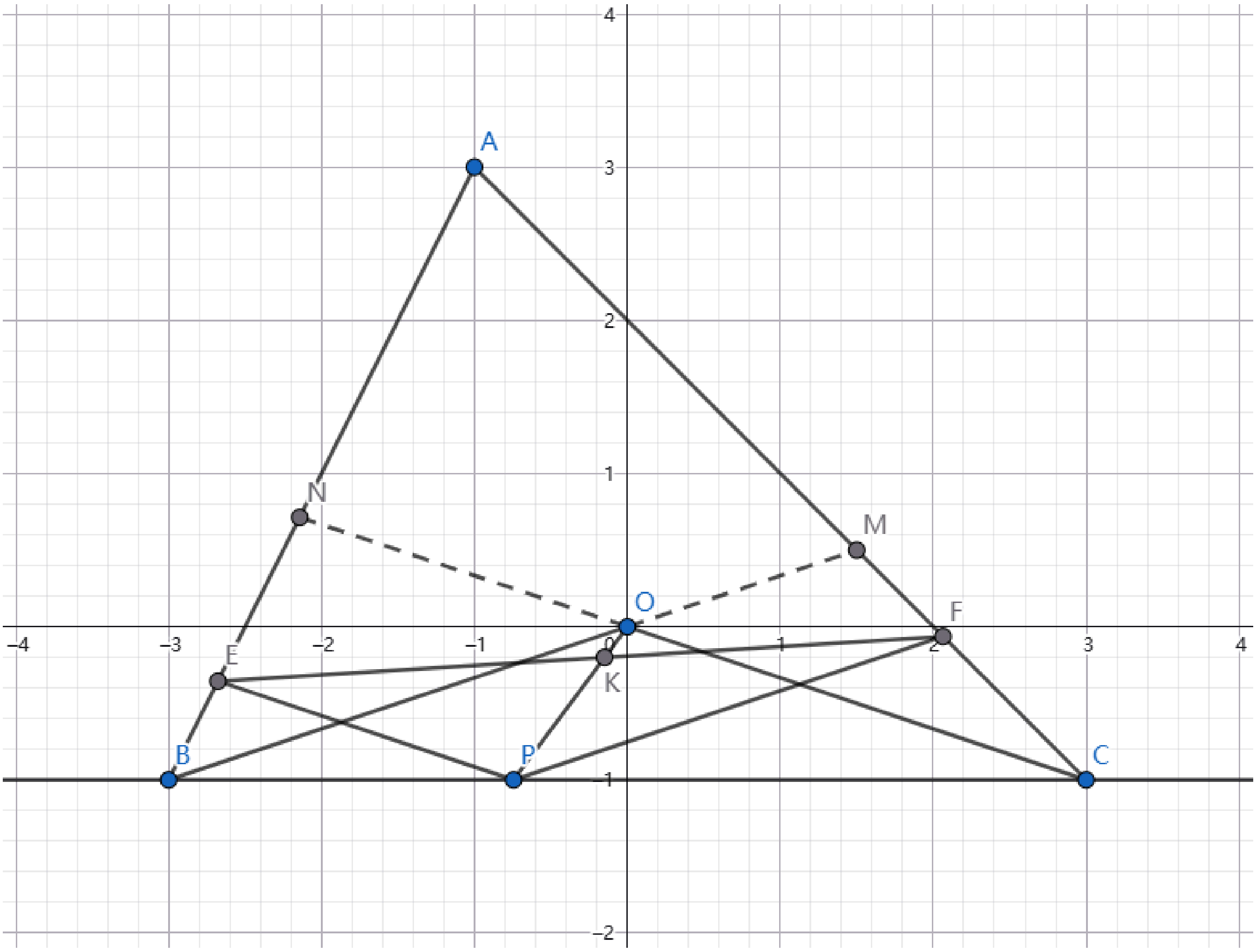
$$S_0=\{7,14,21,28,35,42,49\}$$
$$S_1=\{1,8,15,22,29,36,43,50\}$$
$$S_2=\{2,9,16,23,30,37,44,51\}$$
$$S_3=\{3,10,17,24,31,38,45,52\}$$
$$S_4=\{4,11,18,25,32,39,46\}$$
$$S_5=\{5,12,19,26,33,40,47\}$$
$$S_6=\{6,13,20,27,34,41,48\}$$

S_0 中至多取 1 个元素，S_1 与 S_6，S_2 与 S_5，S_3 与 S_4 不能同时出现，故最大值为 $1+8+8+8=25$

黑暗森林

【答案】$\boxed{57}$

【解析】



延长 BO 交 AC 于 M，延长 CO 交 AB 于 N

由于 $\dfrac{|EK|}{|FK|}=\dfrac{S_{\Delta EOP}}{S_{\Delta FOP}}=\dfrac{S_{\Delta CPE}}{S_{\Delta BPE}}=\dfrac{|PE||PC|\sin\angle EPC}{|PB||PF|\sin\angle FPB}=\dfrac{|CN||BC|\sin\angle OCB}{|BC||BM|\sin\angle OBC}=\dfrac{|CN||OB|}{|BM||CO|}$

然后开始计算

直线 AB：$y=2x+5$；直线 AC：$y=-x+2$；直线 OM：$y=\dfrac{1}{3}x$；直线 ON：$y=-\dfrac{1}{3}x$

所以 $M(\frac{3}{2},\frac{1}{2}),N(-\frac{15}{7},\frac{5}{7})$

得 $|CN|=\frac{12\sqrt{10}}{7},|BM|=\frac{3\sqrt{10}}{2}$

因此 $\frac{|EK|}{|FK|}=\frac{|CN|}{|BM|}=\frac{8}{7}$

【如何提交】$8\times 7+1=57$

死神永生

【答案】$\boxed{1111}$

【解析】是一道周期题，因为 $3^n\%11,7^n\%11$ 是有周期的

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$3^n\%11$	3	9	5	4	1	3	9	5	4	1
$7^n\%11$	7	5	2	3	10	4	6	9	8	1
$(3^n+7^n+4)\%11$	3	7	0	0	4	0	8	7	5	6

所以 $n\%10\in\{3,4,6\}$

对于 $n\%10=3$，有 $3+13+\cdots+83=387$

对于 $n\%10=4$，有 $4+14+\cdots+84=396$

对于 $n\%10=6$，有 $6+16+\cdots+76=328$

因此和为 $387+396+328=1111$

？？？

【答案】bring her eyes

【解析】由于第 12 题中莫名出现了一个没有必要出现的概念 **最小正剩余**，所以你应该对所有题目的答案对 26 取最小正剩余，然后 $\mathrm{A}-1,\mathrm{B}-2,\cdots,\mathrm{Z}-26$

题目编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
题目答案	2	122	4013	14	85	216	5	1006	2033	25	57	1111
对 26 取最小正剩余	2	18	9	14	7	8	5	18	5	25	5	19
对应字母	b	r	i	n	g	h	e	r	e	y	e	s

bring her eyes 对应的书名是《带上她的眼睛》