

YCup Stage 7. 单身

(UTC+32) 5.20 11:50-12:30

出题人：惠雨辰。

借着 5/20 这个特别的日子，我郑重送上一份心意：

- 表白永强班——你们是青春里最耀眼的朝阳；
- 表白曹二——你是我青春中最骄傲的名字；
- 表白祖国——愿山河锦绣，繁荣昌盛，岁岁长安。

此刻身在考场的你们，是我最想悄悄道一声加油的人。

愿你们心怀热忱，不负青春韶华；潜心向学，立志默默拔尖。

也愿你们在合适的时候遇到良人，携手同行，并肩报效家国。（By 验题人 陈洛炜）

1 约定 2026

在那个春天，你曾试图用最优的策略去截获那个名为 $(1, 1, 0)$ 的序列，以为这样就能留住她的脚步，让她认为她的春天就是你。

设

$$p = \frac{1}{26}.$$

数列 $\{a_n\}$ 定义为

$$a_n = \sin((b_1 q^{n-1} p + \phi)\pi),$$

其中 b_1, q 为正整数，且 $q \geq 2$ ， ϕ 为实数。

初始的记忆 b_1 是任意的，但你可以根据 b_1 的取值选择合适的相位 ϕ 。

试求满足下列条件的最小正整数 q ：

对于任意正整数 b_1 ，均存在实数 ϕ ，使得对任意正整数 k, j ，都有

$$a_k a_j \leq \frac{3}{4}.$$

2 规则

太阳帅刚刚发布了船模大赛的规则，是一个多项式 $P(x)$ 。

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n.$$

在这个多项式中，次数 n 未知，每一个系数 c_i 都是非负整数。

你面前有一台破译机器，它允许你进行若干次询问。每次询问时，你可以输入一个正整数 k ，机器会立刻输出 $P(k)$ 的值。并且，每一次输入的 k 都可以根据之前所有询问的结果来决定。

为了保证无论船模大赛的规则（即隐藏的多项式 $P(x)$ ）是什么，你都能唯一确定它的所有系数，最少需要预留多少次询问机会？

如果规则的制定不受规则约束，那和随机杀人无异。

3 曼波

基米。

已知

$$\alpha, \beta \in (0, 1), \quad \alpha\beta = \frac{1}{8}.$$

当 $y = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ 取得最大值时，求

$$\alpha + \beta + y$$

的值。

4 『氷滅の135小節』

这里，天界与魔界正进行着一场博弈。

天界的使者带来了 799 颗代表纯净秩序的蓝球；魔界的领主则拿出了 325 颗代表混沌意志的红球。他们将这些灵魂之球全部投入了一个巨大的、被冰灭气息覆盖的罐子中。

每一场对赌中，罐子中每个球被抽出的概率完全相同。抽出一个球后，将该球放回罐中，并按照它的颜色补充新的球：

1. 若抽中蓝球，则向罐中额外加入 9 颗蓝球；
2. 若抽中红球，则向罐中额外加入 9 颗红球。

请计算：第 135 场对赌中，抽出蓝球的概率是多少？

5 天工开物

Tips：本故事为虚构，如有雷同纯属巧合。

震惊！某人花 2026 元高价制作高原创船体竟然被 7.99 元制作的预制船击败了！

为了安抚马内打水漂的同学，你制作了一个精美的装置……

圆上有 2026 个点，这 2026 个点等分圆周，即这 2026 个点是一个正 2026 边形的全部顶点。

从这 2026 个点中等概率随机选取三个不同的点 A, B, C ，并连接成三角形 $\triangle ABC$ 。

请计算： $\triangle ABC$ 是锐角三角形的概率。

6 互联网重度依赖

糖糖想要和粉丝玩一个小游戏，但是由于糖糖连 Easy 题都无法完成，所以只好请阿 P 来帮忙了。

平面上有 2026 个点。

现在，你可以在平面上安排这 2026 个点的位置，对于某一种点集布局，你可以构建若干三角形，满足这些三角形互不重合（特别地，两个三角形仅仅是共边或者共顶点而没有内部的交叉的话，不算重合）且所有顶点都属于这 2026 个点。

请计算在所有的点集布局的可能下，最大能构建的三角形数量。

7 这期神了

立体几何神了。立体几何拉了。

已知某圆锥的高度恰好等于底面半径。已知其高度为 2026。

一个平面斜切该圆锥，得到一个椭圆截面。设该椭圆截面上距离地面最高的点为 A ，距离地面最低的点为 B 。要求 A, B 都不在底面上。

设圆锥底面圆心为 O 。若这个截面满足 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ ，则称它为一个“优美面”。

设所有优美面的椭圆中心距离地面的高度所构成的集合为 S 。求 S 中所有整数元素的和。

8 你们 20 号约会可以带上我吗

我坐在旁边吃，一句话不说。你们约会肯定不好意思吃太多，那不是浪费了吗。我去，我是饭桶，可以不浪费粮食，保证一言不发。对了，我想吃火锅或烤肉，我说真的。

他们拒绝了作为电灯泡的申请，所以你开始写题。

已知向量 \vec{a} , \vec{b} 与 \vec{c} 满足：

$$|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = 2, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 3, \quad \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}.$$

其中， λ 与 μ 满足 $\lambda + \mu = 2$ ，且 $|\vec{c} - 3\vec{a}| = 2|\vec{c}|$ 。

设所有满足上述条件的实数对为 $(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2), \dots, (\lambda_m, \mu_m)$ ：

求

$$\sum_{i=1}^m (\lambda_i + \mu_i + \lambda_i \mu_i).$$

9 丁字路口的红灯可以闯吗？

空间里存在四个点 O, A, B, C 作为一个丁字路口。它满足：

$$OA \leq 6, \quad OB \leq 6, \quad OC \leq 6.$$

在所有满足上述条件的点 A, B, C 中，三角形 $\triangle ABC$ 的面积最大可以是多少？

人的自利倾向，会导致标准滑坡。

10 江南造船，劳动实践，耶！

少耶，多做题。

已知 $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$ 为 1 到 2026 的一个排列。

设下式中 S 的最大值为 M ：

$$S = \sum_{i=1}^{2025} |a_{i+1} - a_i|.$$

设达到最大值的排列个数为 k 。

求 $M + \ln k$ 的整数部分。